

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXII - ANNO CXXXIV

(1995)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXII - ANNO CXXXIV

(1995)

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1996

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Febbraio 1996

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2003 2002 2001 2000 1999 1998 1997 1996

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2381-6

INDICE

F.E. Lauria - <i>One some sufficient conditions for the Caianiello-Hebb transform convergence</i>	pag. 7
A. Feoli - <i>«Quantum Geometry» e accelerazione massima</i>	» 43
T. Quagliariello - <i>Una messa a punto nella corrispondenza Galileo Galilei-Fulgenzio Micanzio</i>	» 63
N. Bisbiglia, M.E. Cucciolito, F. Ruffo, V. de Felice - <i>Organometal Fragments Bound to a Coordinatively Saturated d^9 Ion</i>	» 73
S. Di Nocera, F. Matano, L. De Palma - <i>Osservazioni geomorfologiche sulla media-bassa valle del fiume Calore (Benevento)</i>	» 91
G. Di Maio, L. Holá - <i>On Hit - and - Miss Topologies</i>	» 103
F. Russo, M. Valletta - <i>Il rischio geologico sensu lato al Somma-Vesuvio</i>	» 125
A. Popoli - <i>Weighted Reverse Holder Inequalities</i>	» 187
C. Capone, A. Fiorenza - <i>Maximal inequalities in weighted Orlicz spaces</i>	» 213
P. de Lucia, G. Ferraro, F. Palladino - <i>Alcuni tratti della matematica napoletana da prima a dopo la Repubblica partenopea del 1799</i>	» 225
G. Guerriero - <i>Global existence and uniqueness to a nonlinear evolution problem in the diffusion of the particles of a mixture in presence of creation events</i>	» 275
B. Jégou - <i>The possible implication of interleukine-1 and interleukine-6 in the coordination of the spermatogenic process in mammals</i>	» 287
B. Jégou - <i>The anti-viral defense system within the mammalian testis</i>	» 289
C. Capone, M.R. Formica - <i>The distance to L^∞ from the Morrey space $L^{p,\lambda}$</i>	» 291
A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone - <i>Elliptic equations with right hand side in $L(\log L)^\alpha$</i>	» 301
S. Rionero, M. Maiellaro - <i>On the stability of Couette-Poiseuille flows in the anisotropic MHD via the Liapunov direct method</i>	» 315
E. D'Aniello, M.G. Graziano - <i>An Hewitt-Yosida theorem for function defined on minimal clans</i>	» 333



ON SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE CAIANIELLO-HEBB
TRANSFORM CONVERGENCE

Nota del Socio Francesco E. Lauria*

Adunanza del 4/2/1995

Riassunto. Dato un insieme finito O di operazioni elementari, si presenta una trasformazione, universale ed iterabile, insieme con una procedura per far convergere la trasformazione, in un numero finito di iterazioni, ad ogni funzione appartenente ad un sottoinsieme finito F dell' insieme delle funzioni calcolabili per mezzo di un numero finito di operazioni appartenenti ad O , convergenza essendo la classica nozione di proprietà acquisita definitivamente da una successione. Poiché il predicato che definisce F è implicitamente di tipo hebbiano, esso viene automaticamente valutato dalla stessa trasformata ad ogni iterazione. In altre parole, la scelta degli elementi di F dipende causalmente e dalla sequenza e dalle modalità di presentazione delle funzioni calcolate dalla trasformata.

Abstract. Given a finite set O of elementary operations, we present an iterable and universal transform together with a procedure to have the former converging, in finitely many iterations, to any function belonging to a finite subset F of the set of the functions computable by means of a finite sequence of the O elements, convergence meaning a property definitively acquired by a succession. As the set F is characterized by an eventually Hebbian predicate, at every iteration the very transform evaluate it, automatically. That is, the F element choice depends causally upon both the sequence and the modality of the computed function presentation to the transform.

1. INTRODUCTION.

We give sufficient conditions for a Caianiello-Hebb transform, see [1, 2, 3, 4, 5], converge to the functions, wherever they are defined, computable in finite terms. As the Caianiello-Hebb transform is iteratively applied to itself, it generates a vector and a matrix succession. If we choose two subsets of the vector component set, say the *i*-subset and the *o*-subset, together with a representation on them of the alphanumeric symbols, then, the *i*-subset components belonging to consecutive vectors can represent a function identifier $f(x)$ and its independent variable value x^* . Similarly, the *o*-subset components belonging to consecutive vectors can represent the function value $f(x^*)$. We present the matrix initial non zero elements together with a procedure such that if $f(x)$ and x^* are the values assumed by the *i*-subset succession, with $f(x)$ defined in x^* , the vector succession acquires definitively the property to represent $f(x^*)$ in the *o*-subset succession, for any function $f(x)$ the very same Caianiello-Hebb transform has computed, following the said procedure, a finite number of times with a repetition cadence sufficient to satisfy the Hebb transform.

We begin with the Caianiello, the Hebb, the Caianiello-Hebb and the adaptable transform definitions. Next, we discuss some of the Caianiello and of the Hebb transform properties and, by composing them, we obtain the sufficient conditions for a Caianiello-Hebb transform convergence. Whereas, we can give sufficient conditions for a Caianiello-Hebb transform to be adaptable, no necessary conditions are known to date. To prove the transform universality, we choose some of the matrix elements so the transform computes the selector function, we call it the duplicator, and the remaining elements so to train the transform to compute the sum and product functions and the minimalization and substitution schemata, see [6]. To help the reader, we present in the last chapter the components and the matrix elements actually introduced, together with their interpretations.

2. THE ADAPTABLE TRANSFORM DEFINITION.

Let us consider the Caianiello transform:

$$f_{h, t+1} = 1[\sum_k c_{h, k} f_{k, t} - T],$$

where $0 < h \leq N$, $0 < k \leq N$, $0 < T$, $0 < t$, $1[x]$ is equal to zero for $x < 0$ and to one otherwise. For any given t , matrix $\|c_{h, k}\|$ and vector F_t , it projects the binary vector F_t into the binary vector F_{t+1} . In other words, the Caianiello transform maps the binary vector set into itself, ie, it can be iteratively applied to its own result to generate a binary vector succession.

Now let us suppose the set C of the matrix $\|c_{h,k}\|$ elements to be composed by two mutually exclusive subsets. One contains the time independent elements $c_{h,k}$, for short the constant elements, and the other contains the time dependent elements $0 < c_{h,k,t} < T$, for short the variable or Hebbian elements. Whereas the former have a constant value, for every iteration of the Caianiello transform the latter value is given by the Hebb transform. That is, i) given the two binary vectors F_{t+1} and F_t ; ii) the Hebbian parameters: "a" greater than one, "b", "d" and "g" positive and smaller than one; iii) if $\sum_{k \in i} c_{h,k,t} f_{k,t}$ is smaller than T , where $\sum_{k \in i}$ represents the sum bounded to all the k s corresponding to the time dependent matrix elements $c_{h,k,t}$, then, the Hebbian transform is defined by the relations:

$$c_{h,k,t+1} = ac_{h,k,t} f_{h,t+1} f_{k,t} + bc_{h,k,t}(1 - f_{h,t+1})f_{k,t} + dc_{h,k,t} f_{h,t+1}(1 - f_{k,t}) + gc_{h,k,t}(1 - f_{h,t+1})(1 - f_{k,t}),$$

$$c_{h,k,t+1} = c_{h,k,t} \text{ otherwise,}$$

ie, if $\sum_{k \in i} c_{h,k,t} f_{k,t}$ is no smaller than T . In other words, the Hebbian elements become constants from the iteration they satisfy the otherwise clause. We call frozen an Hebbian element satisfying the latter condition, ie, an element grown into a constant thanks to the Caianiello and to the Hebb transform, in the order, iterated application.

By definition, the functional product of the Caianiello transform times the Hebb transform, in the order, is a Caianiello-Hebb transform. Let us call i and o two mutually exclusive subsets of the vector component set. We shall say "a Caianiello-Hebb transform converges to the function f " if there are: i) a codification into the subset i ; ii) a codification from the subset o ; iii) a procedure such that after finitely many iterations, let t' be their number, some of the Hebbian elements become frozen; iv) whenever we code, starting at the iteration t'' greater than t' , the function f name and a value x^* into the subset i , with f defined in x^* , then, after finitely many iterations following t'' , the subset o assume the $f(x^*)$ coded value.

A Caianiello-Hebb transform converging to a function f is called an "adaptable transform". If an adaptable transform converges to f for a given procedure, we call the latter a "training procedure" and we say the adaptable transform "has been trained in the f execution" or "has learnt to compute f ". Because to each adaptable transform are associated finitely many Hebbian elements, whereas it can compute infinitely many functions, it can be trained to execute, at the most, finitely many functions. Actually, the set of functions an adaptable transform is trained to execute contains the first functions computed with a training procedure satisfying the iii) condition, see the above given definition. Eventually, the number of functions an adaptable transform can learn to

compute increases with N , the vector dimension, and depends deterministically upon both the sequence and the modality of the computed function presentation.

Because of the Hebb transform otherwise clause, an adaptable transform convergence is a definitively acquired property and the t' value depends both on the Hebbian parameters and on the training procedure chosen. Once the adaptable transform has been trained in the execution of a function, then, it can compute the function wherever the latter is defined.

3. SOME OF THE CAIANIELLO TRANSFORM PROPERTIES.

As is well known the Caianiello transform is universal, moreover given the two binary vectors F_{t+1} and F_t we can always find a matrix $\|c_{h,k}\|$ projecting the latter into the former. For simplicity sake, with $c_{h,k} < -T$ we represent a matrix element in absolute value greater than the sum, for all k , of all positive elements with the same index h . For the same reason, we present only the non zero matrix elements, ie, all the non explicitly set matrix elements are supposed to be equal to zero.

3.1 The Connective Computing Components.

We say the vector component h , at the iteration t , computes the logical AND of the components k_1, k_2, \dots, k_p values at the iteration $t-1$, if:

$$c_{h,k_1} = c_{h,k_2} = \dots = c_{h,k_p} = T/p.$$

We say the component h , at the iteration t , computes the logical OR of the components k_1, k_2, \dots, k_p values at the iteration $t-1$, if:

$$c_{h,k_1} = c_{h,k_2} = \dots = c_{h,k_p} > T.$$

We say the component e computes the existential quantifier in the iteration domain, if:

$$c_{e,k_0} = c_{e,e} > T.$$

Comment: the component computing the existential quantifier assumes the value one for every iteration following the iteration, let us call it t' , in which the component k_0 assumes for the first time the value one, independently of the value assumed subsequently by the component k_0 . Its value is zero for every iteration preceding t' . In the following we shall suppose both the vector component e to compute the existential quantifier and k_0 to have been equal to one at least once in the preceding iterations.

We say the component h , at the iteration t , computes the logical negation of the component k value at the iteration $t - 1$, if:

$$\begin{aligned} c_{h,k} &< -T \\ c_{h,e} &> T. \end{aligned}$$

3.2 A Component Subset Organized As A Store.

We say the component s_j stores one of the component a_{i_1+j} , a_{i_2+j} , ..., a_{i_M+j} values if:

$$\begin{aligned} c_{s_j, q_q} &< -T \\ c_{s_j, r} &= c_{s_j, a_{i_1+j}} = c_{s_j, a_{i_2+j}} = \dots = c_{s_j, a_{i_M+j}} = T/2 \\ c_{s_j, s_j} &> T, \end{aligned}$$

where the components r , a_{i_1+j} , a_{i_2+j} , ..., a_{i_M+j} and q_q shall be defined in a few moments.

We say the component subset s -set, belonging to the i and to the o subset complement, stores one of the M "identifiers", ie, one of the m digit binary numerals $a_{i_h+1}a_{i_h+2} \dots a_{i_h+j} \dots a_{i_h+m}$, for $h = 1, 2, \dots, M$, if the s -set is composed by the m components s_{s_j} , for $j = 1, 2, \dots, m$, plus the four components l_1, l_2, l_3, l_4 characterized by the matrix elements:

$$\begin{aligned} c_{r, or_1} = c_{r, or_2} = \dots = c_{r, or_p} = c_{l_1, r} = c_{l_2, l_1} = c_{l_3, l_2} = c_{l_4, l_3} = c_{l_4, l_4} &> T \\ c_{l_4, q_q} &< -T. \end{aligned}$$

where the components or_1, or_2, \dots, or_p shall be defined in 3.3.

Let t^* be the last iteration characterized by the component r equal to one, after the last iteration the component q_q assumed the value one, then, the s -set stores, until the component q_q assumes again the value one, the values the components a_{i_h+1} , a_{i_h+2} , ..., a_{i_h+m} , for $h = 1, 2, \dots, M$, had at the iteration t^* . In other words, if we want a given s -set to store the values assumed by the components a_{i_h+1} , a_{i_h+2} , ..., a_{i_h+m} at the iteration t' , then, the matrix must be chosen so that both the q_q component assumes the value one at the iteration t' minus one and the r component assumes the value one at the iteration t' . That is, we shall must choose some of the matrix elements, accordingly.

3.3 A Component Subset Organized As A Counter.

We say the component subset r_p -set, belonging neither to the i nor to the o subset, is a p counter, for a given p greater than zero, with q_f defined in 3.5. third but last relation and q_q defined in 3.4. last relations, if it is defined by the following relations:

$$\begin{aligned}
 c_{q, q_q} &= c_{q, q_f} > T \\
 c_{or_1, q} &> T \\
 c_{or_1, ih_1} &< -T \\
 c_{or_1, ih_2} &< -T \\
 &\dots \\
 c_{or_1, ih_p} &< -T \\
 c_{ih_1, q} &< -T \\
 c_{ih_1, or_1} &> T \\
 c_{ih_1, ih_1} &> T \\
 c_{dl_1, ih_1} &> T \\
 c_{or_2, ih_1} &< -T \\
 c_{or_2, dl_1} &> T \\
 c_{ih_2, q} &< -T \\
 c_{ih_2, or_2} &> T \\
 c_{ih_2, ih_2} &> T \\
 &\dots \\
 c_{dl_{p-1}, ih_{p-1}} &> T \\
 c_{or_p, ih_{p-1}} &< -T \\
 c_{or_p, dl_{p-1}} &> T \\
 c_{ih_p, q} &< -T \\
 c_{ih_p, or_p} &> T \\
 c_{ih_p, ih_p} &> T \\
 c_{dl_p, ih_p} &> T \\
 c_{rst, ih_p} &< -T \\
 c_{rst, dl_p} &> T.
 \end{aligned}$$

If in a r_p -set all the components $or_1, or_2, \dots, or_p, ih_1, ih_2, \dots, ih_p, dl_1, dl_2, \dots, dl_p, rst$ have the value zero, then, if the component q assumes the value one at the iteration t' , the component or_1 assumes the value one at t' plus one and then assumes the value zero. At t' plus two the component ih_1 assumes the value one and for the following iterations continues to have the value one, until q assumes again the value one, let us say at the iteration t'' . At t'' plus one both or_1 and ih_1 assume the value zero, maintaining it until q

has assumed the value one p minus one times. However, at t'' plus one dl_1 assumes the value one, consequently, at t'' plus two or_2 and at t'' plus three ih_2 assume the value one. Whereas the former reverts, at the next iteration, to the value zero, the latter maintains the value one until q is again one. Every time q assumes the value one the story repeats itself until dl_p assumes the value one, then, at the next iteration rst assumes the value one and $or_1, or_2, \dots, or_p, ih_1, ih_2, \dots, ih_p, dl_1, dl_2, \dots, dl_p$ assume the value zero. As also rst reverts to zero, at the next iteration, we are again in the initial conditions and the carousel can start again. To conclude, in the r_p -set the components or_1, or_2, \dots, or_p assume the value one, one after the other, one iteration after the component q has assumed the value one. After q times, first rst assumes the value one, then, the r_p -set is ready to start anew.

3. 3. 1. A component subset organized as a conditional counter.

If ia, iv belong to the i -subset and the it are the components defined in 3. 6. 0., we can define the "conditional counter", or a c_r -set, ie, the component subset, belonging to the i - and to the o -subset complement, such that, for p equal to two, its elements satisfy both to all the relations defining the r_p -set and to:

$$\begin{aligned}
 c_{or_1, trdltstr} &> T \\
 c_{trddl_1, trdltstr} &> T \\
 c_{ih_1, trdltstr} &< -T \\
 c_{or_2, trddl_1} &< -T \\
 c_{ih_2, trdltstr} &< -T \\
 c_{rst, trddl_2} &< -T \\
 c_{trddl_2, trdltstr} &> T \\
 c_{trdltstr, or_2} = c_{trdltstr, ia} = c_{trdltstr, iv} = c_{trdltstr, it} &= T/2.
 \end{aligned}$$

3.4 A Component Subset Computing The Equal Relation.

As the s -set stores a m digit binary numeral we need to know if two of them are or not equal, to this end we define a q -set, belonging neither to the i nor to the o subset. The heart of a q -set is the xor -set which, in turn, is composed both by m two component sets, or 2-sets, and by one component computing the AND of all the m 2-sets. The p -th 2-set first component assumes the value one with a delay of one iteration with respect to both the x_i and y_i components assuming the value one. Instead, the 2-set second component computes the AND of the two components x_i and y_i . Eventually, for $i = 1, 2, \dots, m$:

$$c_{q_i, x_i} = c_{q_i, y_i} < -T$$

$$\begin{aligned} c_{q_1, e} &> T \\ c_{q'_i, x_i} &= c_{q'_i, y_i} = T/2 \\ c_{x_{or}, q_i} &= c_{x_{or}, q'_i} = T/m \text{ for all } i. \end{aligned}$$

To complete the q -set definition, we must characterize the q_q component:

$$\begin{aligned} c_{q_q, x_{or}} &= c_{q_q, l_4} = T/2 \\ c_{q_q, q_q} &< -T, \end{aligned}$$

where l_4 has been defined in the s -set characterization and has been introduced in the first relations characterizing the r_p -set.

3.5 A Component Subset To Filter The i And or_p Subsets.

To filter out selectively the value assumed by the i and or_p subset components, we define the f -set, belonging neither to the i nor to the o subset. For simplicity sake, we consider the subset i , containing I elements, divided into two mutually exclusive subsets. The first contains the elements pi_u , we call them the i positive components, and the second contains the elements ni_v , we call them the i negative components, for u and v positive and u plus v equal to I . Accordingly, the f -set is defined by the relations:

$$\begin{aligned} c_{st, pi_u} &= c_{ist, ni_v} = c_{st, or_p} = c_{ist, or_p} > T, \text{ for all the } u, v \text{ and } p \text{ values} \\ c_{st, trd} &= c_{ist, trd} < -T \\ c_{h, ist} &< -T \\ c_{trd, rst} &< -T \\ c_{h, e} &> T \\ c_{j, st} &> T \\ c_{q_f, h} &= c_{q_f, j} = T/2 \\ c_{trd, q_f} &= c_{trd, trd} = T. \end{aligned}$$

where rst is the component defined in the last relations characterizing the r_p -set. The component j has been introduced to have the same number of iterations comprised between the one the st component assumes the value one and the one the q_f component assumes the value one, with respect to the number of iterations comprised between the ist component assuming the value one and the q_f component assuming the value one.

3.6. A Component Subset Organized As A Tape

Whereas the s -set can be a store for numerals, now we want to define the tp -set, ie, a component subset usable as a Turing machine tape and belonging neither to the i nor to

the o subset. To this end, let us introduce the j -th tape unitary component, the uny_j -set, for $-(UNY + 1) < j < UNY + 1$ where UNY is a positive constant, containing the components $0uny_j, 1uny_j, r0uny_j, r1uny_j, l0uny_j, l1uny_j, dr0uny_j, dr1uny_j, dl0uny_j, dl1uny_j$ characterized by the relations:

$$\begin{aligned}
 c_{0uny_j, 0uny_j} &= c_{0uny_j, dl0uny_{j-1}} = c_{0uny_j, dr0uny_{j+1}} = c_{1uny_j, 1uny_j} = \\
 &= c_{1uny_j, dl1uny_{j-1}} = c_{1uny_j, dr1uny_{j+1}} > T \\
 c_{0uny_j, l0uny_j} &= c_{0uny_j, r0uny_j} = c_{1uny_j, l1uny_j} = c_{1uny_j, r1uny_j} < -T \\
 c_{l0uny_j, 0uny_j} &= c_{r0uny_j, 0uny_j} = c_{l1uny_j, 1uny_j} = c_{r1uny_j, 1uny_j} = c_{l0uny_j, L} = \\
 &= c_{r0uny_j, R} = c_{l1uny_j, L} = c_{r1uny_j, R} = T/2 \\
 c_{l0uny_j, dl0uny_j} &= c_{r0uny_j, dr0uny_j} = c_{l1uny_j, dl1uny_j} = c_{r1uny_j, dr1uny_j} < -T \\
 dl0uny_j, l0uny_j &= c_{dr0uny_j, r0uny_j} = c_{dl1uny_j, l1uny_j} = c_{dr1uny_j, r1uny_j} > T \\
 c_{l1uny_{-UNY}, dr1uny_{-(UNY+1)}} &= c_{l1uny_{UNY}, dl1uny_{(UNY+1)}} = c_{0uny_{-UNY}, dr0uny_{-(UNY+1)}} = \\
 &= c_{0uny_{UNY}, dl0uny_{(UNY+1)}} < -T,
 \end{aligned}$$

where L, R , is the command to copy the uny_j -set values into the uny_{j-1} -set, uny_{j+1} -set. Whereas $0uny_j, 1uny_j$, stores the value zero, one, the remaining components $r0uny_j, r1uny_j, l0uny_j, l1uny_j, dr0uny_j, dr1uny_j, dl0uny_j, dl1uny_j$ are inserted as one iteration delays to copy each of them into the next so to execute the L, R , command.

When one of the components $dr1uny_{UNY}, dr0uny_{UNY}, dl1uny_{-UNY}, dl0uny_{-UNY}$ is in the state one, both the matrix is automatically bordered with a preassigned number of rows and columns and the vector dimension is increased by the same number of components. To this end, it is sufficient to take $dr1uny_{UNY}, dr0uny_{UNY}, dl1uny_{-UNY}, dl0uny_{-UNY}$ respectively equal to $N-3, N-2, N-1, N$ so, by simply setting N to a new value, we insert automatically the new matrix elements with the correct values. In other words, automatically the constant UNY is set to the new value: UNY plus the number of the vector new components.

Going back to our goal, a tp -set is a set of uny_j -sets, for $-(UNY + 1) < j < UNY + 1$ with the constant $UNY > 0$, with some more components to operate it as the tape it is meant to mimic. However there are two main differences between the tp -set and the Turing machine tape: first, whereas the former alphabeth is {blank, one, zero}, the latter is {one, zero}; second, in the latter the tape moves, instead in the former the stored information is shifted, to the left or right uny_j -set, with respect to the tp -set reading and writing components, ie, with respect to the uny_0 -set. The tp -set writing access is done via the components ot_{blank}, ot_{one} and ot_{zero} , if the matrix elements satisfy the relations:

$$\begin{aligned}
 c_{l1uny_0, ot_{one}} &= c_{0uny_0, ot_{zero}} > T \\
 c_{l1uny_0, ot_{blank}} &= c_{0uny_0, ot_{blank}} < -T,
 \end{aligned}$$

where ot_{blank} , ot_{one} and ot_{zero} shall be characterized in 6..

The tp-set reading access is done via the components it_{blank} , it_{one} and it_{zero} , if the matrix elements satisfy the relations:

$$\begin{aligned} c_{it_{\text{blank}}, 1uny_0} &= c_{it_{\text{blank}}, 0uny_0} < -T, \\ c_{it_{\text{blank}}, e} &= c_{it_{\text{one}}, 1uny_0} = c_{it_{\text{zero}}, 0uny_0} > T. \end{aligned}$$

3. 6. 0. The conditional component subset.

Some of the matrix elements are organized as conditional elements, ie, they assume the value one if the tp-set contains some standard sequence of uny_i -set values. They are the cr_p -set elements and belong to the complement of both the i and the o subset. The conditions are defined as: a one followed by two zeros, a one followed by three zeros, ... and are the first-left, second-left, ... condition, respectively. Symmetrically, there are the first-right, second-right, ... condition, ie, two zeros followed by a one, three zeros followed by a one, ... To read whether or not the j -th-left, j -th-right, condition is satisfied the components lit_j , rit_j , assumes the value one, a given number of iterations after the uny_0 -set stores the most extreme, ie, either the leftmost or the rightmost zero in a sequence of j plus one consecutive zeros. For j greater than one, the $lit[j-1]$ characterization is given by the relations:

$$\begin{aligned} c_{1dlit[j-1], one0} &= c_{1dlit[j-1], 1zero0} = c_{1dlit[j-1], 2zero0} = \dots = c_{1dlit[j-1], jzero0} = \\ &T/[j+1], \\ c_{one0, one1} &= c_{1zero0, 1zero1} = c_{2zero0, 2zero1} = \dots = c_{jzero0, it_{\text{zero}}} > T, \\ c_{one1, one2} &= c_{1zero1, 1zero2} = c_{2zero1, 2zero2} = \dots = c_{[j-1]zero1, it_{\text{zero}}} > T, \\ &\dots \\ c_{one[j-2], one[j-1]} &= c_{1zero[j-2], 1zero[j-1]} = c_{2zero[j-2], it_{\text{zero}}} > T, \\ c_{one[j-1], onej} &= c_{1zero[j-1], it_{\text{zero}}} > T, \\ c_{onej, it_{\text{one}}} &> T, \\ c_{2dlit[j-1], 1dlit[j-1]} &= c_{3dlit[j-1], 2dlit[j-1]} = \dots = c_{lit[j-1], kdlit[j-1]} > T, \end{aligned}$$

where $1zero_i$, $2zero_i$, ..., $jzero_i$, $1dlit[j-1]$, ..., $kdlit[j-1]$ are delays and k must be chosen so that both $lit[j-1]$ and or_2 , see 3. 3. 1. and in 5. the conditional assembly definition, assume simultaneously the value one.

To restore the tp-set, ie, to erase the zeros stored into the tp-set there is the $rslit[j-1]cr_p$ -set, as usual different from the i and the o -subsets. We present the $rslit[j-1]cr_p$ -set for one out of the many possible tp-set contents: the interested reader can easily extend our solution to the other cases. If the tp-set contains at least one $1uny_j$, with the value

one, followed by j consecutive zeros followed by at least one $l_{un}j$, with the value one, then, the $rstlit[j-1]cr_p$ -set computes the algorithm: nothing happens. Instead, if the tp -set contains at least one blank, followed by j consecutive zeros, followed by at least one $l_{un}j$, with the value one, or if it contains the contrary sequence, then, the $rstlit[j-1]cr_p$ -set computes the algorithm: i) the component $ldlit[j-1]$ equal to one sets to blank all the j consecutive zeros, starting from the rightmost, ie, it sets to one $j-1$ times the pair ot_{blank} followed by R ; ii) it goes back to the initial position, ie, it sets to one $j-1$ times the L component.

To test if the tp -set is storing the numeral zero, ie if it contains a blank followed by a one followed by a blank, there is the it_0 component. It assumes the value one the iteration after the un_{y_0} -set stores either the leftmost or the rightmost zeros, depending on the direction we are reading the tape. If 0_{blank_0} , 1_{blank_j} , 0_{one_j} are delays, then, the it_0 characterization is given by the relations:

$$\begin{aligned} c_{it_0, 1_{blank_0}} &= c_{it_0, 0_{one_0}} = c_{it_0, 0_{blank_0}} = T/3, \\ c_{1_{blank_0}, 1_{blank_1}} &= c_{0_{one_0}, 0_{one_1}} = c_{0_{blank_0}, it_{blank}} > T, \\ c_{1_{blank_1}, 1_{blank_2}} &= c_{0_{one_1}, it_{one}} > T, \\ c_{1_{blank_2}, it_{one}} &> T. \end{aligned}$$

3. 6. 1. The component subsets to move the numerals in the tp -set.

To move the numerals with respect to the un_{y_0} -set, we present four subsets, different from the i -subset and the o -subset. In any case we start with both the it_{blank} equal to one and, in the iteration following either an L or an R component equal to one, either it_{one} or it_{zero} equal to one. Two move the tp -set content until the it_{blank} assumes the value one, the first moving the tp -set content toward the left and the second toward the right. The remaining two move, one toward the left the other toward the right, the stored numerals until the tp -set content has been moved on the other side of the un_{y_0} -set. Whereas we call "l-mover" and the "r-mover" the former two subsets, we call "L-mover" and "R-mover" the latter. According to our conventions both the l-and the L-mover move the tp -set stored numerals to the un_{y_0} -set left, the r- and the R-mover to the right.

If $callmvr$ is the component we choose as starter, then, the l-mover is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} c_{L, callmvr} &= c_{lmvr, callmvr} = c_{lmvr, lmvr} = c_{L, lmvr} > T \\ c_{lmvr, lmvr} &= c_{lmvr, it_{one}} = c_{lmvr, it_{zero}} = T/2 \\ c_{lmvr, it_{blank}} &= c_{lmvr, it_{blank}} < -T. \end{aligned}$$

If calRmvr is the component we choose as starter, then, the r-mover is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} c_{R, \text{calRmvr}} &= c_{\text{rmvr}}, \text{calRmvr} = c_{\text{rmvr}}, \text{rmvr} = c_{R, \text{rmvr1}} > T \\ c_{\text{rmvr1}, \text{rmvr}} &= c_{\text{rmvr1}, \text{it}_{\text{one}}} = c_{\text{rmvr1}, \text{it}_{\text{zero}}} = T/2 \\ c_{\text{rmvr}, \text{it}_{\text{blank}}} &= c_{\text{rmvr1}, \text{it}_{\text{blank}}} < -T. \end{aligned}$$

If calLmvr is the component we choose as starter, then, the L-mover is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} c_{L, \text{calLmvr}} &= c_{\text{Lmvr}}, \text{calLmvr} = c_{L, \text{Lmvr1}} = c_{\text{Lmvr1}, \text{Lmvr}} = c_{\text{Lmvr}, \text{it}_{\text{one}}} = \\ &= c_{\text{Lmvr}, \text{it}_{\text{zero}}} = c_{\text{Lmvr2}, \text{it}_{\text{blank}}} = c_{\text{Lmvr}, \text{Lmvr}} > T \\ c_{\text{Lmvr3}, \text{it}_{\text{blank}}} &= c_{\text{Lmvr3}, \text{Lmvr2}} = T/2 \\ c_{\text{Lmvr}, \text{Lmvr3}} &= c_{\text{Lmvr1}, \text{Lmvr3}} < -T \\ c_{R, \text{Lmvr3}} &= c_{R, \text{Lmvr4}} = c_{\text{Lmvr4}, \text{Lmvr3}} > T. \end{aligned}$$

If calRmvr is the component we choose as starter, then, the R-mover is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} c_{R, \text{calRmvr}} &= c_{\text{Rmvr}}, \text{calRmvr} = c_{R, \text{Rmvr1}} = c_{\text{Rmvr1}, \text{Rmvr}} = c_{\text{Rmvr}, \text{it}_{\text{one}}} = \\ &= c_{\text{Rmvr}, \text{it}_{\text{zero}}} = c_{\text{Rmvr2}, \text{it}_{\text{blank}}} = c_{\text{Rmvr}, \text{Rmvr}} > T \\ c_{\text{Rmvr3}, \text{it}_{\text{blank}}} &= c_{\text{Rmvr3}, \text{Rmvr2}} = T/2 \\ c_{\text{Rmvr}, \text{Rmvr3}} &= c_{\text{Rmvr1}, \text{Rmvr3}} < -T \\ c_{L, \text{Rmvr3}} &= c_{L, \text{Rmvr4}} = c_{\text{Rmvr4}, \text{Rmvr3}} > T. \end{aligned}$$

3. 6. 2. The component subset to duplicate the numerals within the tp-set.

To duplicate the numerals within the tp-set, we present six subsets, different from the i-subset and the o-subset: in any case we start with the it_{blank} equal to one. For simplicity sake, we consider only the unary numeral case. Of the six subsets, three start with the uny_0 -set content changing one iteration after the L component assumes the value one and remaining unaltered one iteration after the R component assumes the value one. Instead, the other three start with the uny_0 -set content changing one iteration after the R component assumes the value one and remaining unaltered one iteration after the L component assumes the value one. Their respective meanings, their names as well as their starter names are: i) duplicate to the left the numeral at the uny_0 -set right, lcpynr -set and lcpynr , ii) duplicate to the right the numeral at the uny_0 -set left, rcpynr -set and rcpynr , iii) duplicate to the left all the numerals at the uny_0 -set right, LCPY -set and LCPY , iv) duplicate to the right all the numerals at the uny_0 -set left, RCPY -set and

RCPY, v) duplicate to the left the next but one numeral at the uny_0 -set right, $lcpynxt$ -set and $lcpynxt$, vi) duplicate to the right the next but one numeral at the uny_0 -set left, $rcpynxt$ -set and $rcpynxt$. To conclude: we start with the uny_0 -set storing a blank and either with the uny_1 -set storing a one and the uny_{-1} -set storing a blank or, vice versa, with the uny_1 -set storing a blank and the uny_{-1} -set storing a one. Moreover, in the tp -set two consecutively stored numerals are separated by one blank. That is, we can employ the zero, as an alternative to the blank, to separate two consecutive numerals. Let us start by characterizing $lcpynr$ -set:

$$\begin{aligned} c_L, lcpynr &= c_{lcpynr1}, lcpynr = c_{ot_{one}}, lcpynr1 = c_{lcpynr2}, lcpynr1 = c_R, lcpynr2 = \\ &= c_{lcpynr3}, lcpynr2 = c_{ot_{zero}}, lcpynr3 = c_{lcpynr4}, lcpynr = c_{lcpynr5}, lcpynr = \\ &= c_{lcpynr4}, lcpynr4 = c_{lcpynr5}, lcpynr5 = c_{calrmvr}, lcpynr3 = c_L, lcpynr6 = \\ &= c_{6lcpynr6}, lcpynr6 > T \\ c_{lcpynr6}, lcpynr4 &= c_{lcpynr6}, it_{blank} = c_{lcpynr7}, 6lcpynr6 = c_{lcpynr7}, it_{one} = \\ &= c_{lcpynr8}, 6lcpynr6 = c_{lcpynr8}, it_{zero} = T/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{lcpynr6}, lcpynr &= c_{lcpynr6}, lcpynr1 = c_{lcpynr6}, lcpynr2 = c_{lcpynr6}, lcpynr3 = \\ &= c_{lcpynr4}, lcpynr7 = c_{lctp1a}, lcpynr = c_{lctp1a}, lcpynr1 = c_{lctp1a}, lcpynr2 = \\ &= c_{lctp1a}, lcpynr3 = c_{lctp1a}, lcpynr7 = c_{lctp1a}, lcpynr4 = c_{lctp1b}, lcpynr4 = \\ &= c_{lctp3}, lmvr = c_{lctp3}, rmvr = c_{lcpynr5}, lctp6 = c_{lctp1b}, lcpynr = c_{lctp1b}, lcpynr1 = \\ &= c_{lctp1b}, lcpynr2 = c_{lctp1b}, lcpynr3 = c_{lctp1b}, lcpynr7 = c_{lctp2}, lcpynr = \\ &= c_{lctp2}, lcpynr1 = c_{lctp2}, lcpynr2 = c_{lctp2}, lcpynr3 = c_{lctp2}, lcpynr7 = \\ &= c_{lctp3}, lcpynr = c_{lctp3}, lcpynr1 = c_{lctp3}, lcpynr2 = c_{lctp3}, lcpynr3 = c_{lctp3}, lcpynr7 = \\ &= c_{lcpynr4}, lcpynr8 = c_{lcpynr5}, lcpynr8 = c_{lcpynr6}, lcpynr8 = c_{9lcpynr9}, lcpynr4 = \\ &= c_{lctp1}, lcpynr4 = c_{lctp2}, lcpynr4 = c_{lctp3}, lcpynr4 = c_{lcpynr5}, lctp6 < -T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{lcpynr9}, lcpynr8 &= c_{9lcpynr9}, lcpynr9 = c_{ot_{blank}}, lcpynr8 = c_{callmvr}, 9lcpynr9 > T \\ c_{lctp1a}, lcpynr5 &= c_{lctp1a}, it_{blank} = c_{lctp1a}, lmvr = T/3 \\ c_{lctp1b}, lcpynr5 &= c_{lctp1b}, it_{blank} = c_{lctp1b}, rmvr = T/3 \\ c_{lctp2}, lcpynr5 &= c_{lctp2}, it_{one} = c_{lctp3}, lcpynr5 = c_{lctp3}, it_{zero} = T/2 \\ c_{ot_{one}}, lctp1a &= c_{calrmvr}, lctp1a = c_{ot_{one}}, lctp1b = c_{lctp4b}, lctp1b = c_L, lctp4b = \\ &= c_{lctp5b}, lctp4b = c_{ot_{blank}}, lctp5b = c_{callmvr}, lctp5b = c_L, lctp2 = c_{lctp5}, lctp2 = \\ &= c_{ot_{blank}}, lctp5 = c_{callmvr}, lctp5 > T \\ c_{lctp6}, lctp5b &= c_{lctp6}, lctp3 = T/2 \end{aligned}$$

The $lcpynr$ -set computes the following algorithm: i) it moves one to the left and sets to one the ot_{one} ; ii) it moves one to the right and sets to one ot_{zero} ; iii) it sets to one $calrmvr$; iii) as the r -mover ends its computation, it moves two times to the left, then, it

sets to one ot_{blank} ; iv) it reads a blank, sets to one ot_{one} , moves one to the left, sets to one ot_{blank} ; v) it sets to one $callmvr$; vi) as the l-mover ends its computation, it sets to one ot_{one} ; vii) it sets to one the $calrmvr$; viii) as the r-mover ends its computation, it executes repeatedly the steps iv), v), vi), vii) until it reads a zero; ix) in the same iteration it sets to one both ot_{blank} and the $callmvr$.

Comment: up to the step iii) the control stays with $lcynr4$, from the step iv) up to viii) $lcynr5$ controls the computation, the final transient, ie, the step ix) is controlled by $lcynr6$.

The algorithm computed by the $rcpynr$ -set is obtained by the one computed by the $lcpynr$ -set by simply interchanging left with right, and vice versa, and $callmvr$ with $carmvr$. The $rcpynr$ -set is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} c_R, rcpynr &= c_{rcpynr1}, rcpynr = c_{ot_{\text{one}}}, rcpynr1 = c_{rcpynr2}, rcpynr1 = c_L, rcpynr2 = \\ &= c_{rcpynr3}, rcpynr2 = c_{ot_{\text{zero}}}, rcpynr3 = c_{rcpynr4}, rcpynr = c_{rcpynr5}, rcpynr = \\ &= c_{rcpynr4}, rcpynr4 = c_{rcpynr5}, rcpynr5 = c_{callmvr}, rcpynr3 = c_R, rcpynr6 = \\ &= c_{6rcpynr6}, rcpynr6 > T \\ c_{rcpynr6}, rcpynr4 &= c_{rcpynr6}, it_{\text{blank}} = c_{rcpynr7}, 6rcpynr6 = c_{rcpynr7}, it_{\text{one}} = \\ &= c_{rcpynr8}, 6rcpynr6 = c_{rcpynr8}, it_{\text{zero}} = T/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{rcpynr6}, rcpynr &= c_{rcpynr6}, rcpynr1 = c_{rcpynr6}, rcpynr2 = c_{rcpynr6}, rcpynr3 = \\ &= c_{rcpynr4}, rcpynr7 = c_{rctp1a}, rcpynr = c_{rctp1a}, rcpynr1 = c_{rctp1a}, rcpynr2 = \\ &= c_{rctp1a}, rcpynr3 = c_{rctp1a}, rcpynr7 = c_{rctp1a}, rcpynr4 = c_{rctp1b}, rcpynr4 = \\ &= c_{rctp3}, rmvr = c_{rctp3}, lmvr = c_{rcpynr5}, rctp6 = c_{rctp1b}, rcpynr = c_{rctp1b}, rcpynr1 = \\ &= c_{rctp1b}, rcpynr2 = c_{rctp1b}, rcpynr3 = c_{rctp1b}, rcpynr7 = c_{rctp2}, rcpynr = \\ &= c_{rctp2}, rcpynr1 = c_{rctp2}, rcpynr2 = c_{rctp2}, rcpynr3 = c_{rctp2}, rcpynr7 = \\ &= c_{rctp3}, rcpynr = c_{rctp3}, rcpynr1 = c_{rctp3}, rcpynr2 = c_{rctp3}, rcpynr3 = c_{rctp3}, rcpynr7 = \\ &= c_{rcpynr4}, rcpynr8 = c_{rcpynr5}, rcpynr8 = c_{rcpynr6}, rcpynr8 = c_{9rcpynr9}, rcpynr4 = \\ &= c_{rctp1}, rcpynr4 = c_{rctp2}, rcpynr4 = c_{rctp3}, rcpynr4 = c_{rcpynr5}, rctp6 < -T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{rcpynr9}, rcpynr8 &= c_{9rcpynr9}, rcpynr9 = c_{ot_{\text{blank}}}, rcpynr8 = c_{calrmvr}, 9rcpynr9 > T \\ c_{rctp1a}, rcpynr5 &= c_{rctp1a}, it_{\text{blank}} = c_{rctp1a}, rmvr = T/3 \\ c_{rctp1b}, rcpynr5 &= c_{rctp1b}, it_{\text{blank}} = c_{rctp1b}, lmvr = T/3 \\ c_{rctp2}, rcpynr5 &= c_{rctp2}, it_{\text{one}} = c_{rctp3}, rcpynr5 = c_{rctp3}, it_{\text{zero}} = T/2 \\ c_{ot_{\text{one}}}, rctp1a &= c_{callmvr}, rctp1a = c_{ot_{\text{one}}}, rctp1b = c_{rctp4b}, rctp1b = c_R, rctp4b = \\ &= c_{rctp5b}, rctp4b = c_{ot_{\text{blank}}}, rctp5b = c_{calrmvr}, rctp5b = c_R, rctp2 = c_{rctp5}, rctp2 = \\ &= c_{ot_{\text{blank}}}, rctp5 = c_{calrmvr}, rctp5 > T \\ c_{rctp6}, rctp5b &= c_{rctp6}, rctp3 = T/2 \end{aligned}$$

For simplicity sake we present the algorithms the RCPY-set, the LCPY-set, the lcpynxt-set and the rcpynxt-set compute, leaving to the interested reader their implementation into the matrix element values.

The RCPY-set computes the algorithm: i) it moves the tp-set content toward the left until it finds two consecutive blanks; ii) it moves the tp-set content one more un_j -set toward the left and sets to one ot_{zero} ; iii) it moves three times toward the right, now it should be reading a one, and moves until it finds a blank; iv) now the un_0 -set should contain a blank and it sets to one ot_{zero} ; v) it moves toward the left until it finds the leftmost zero, after the three blanks gap; vi) it moves one more un_j -set toward the left: now it should read a blank; vii) it executes the steps iv), v) and vi), repeatedly, until it finds two consecutive blank un_j -sets and it stops on the rightmost of the two; viii) the rcpynr-set computation is executed as many times as the number of zeros written in the step vii), ie, every time rcpynr becomes equal to one the tp-set leftmost zero is replaced by a blank; ix) it replaces each remaining zero, ie, each zero separating two consecutive duplicated numerals with a blank; x) it stops with the un_0 -set reading the first blank on the left of the copied numerals, all the previously written zero having been substituted by blanks.

The algorithm computed by the LCPY-set is obtained by interchanging right with left, and vice versa, and rcpynr-set with lcpynr-set in the previous one.

The lcpynxt-set computes the algorithm: i) it moves toward the right until it finds a blank, then, it sets to one ot_{zero} ; ii) it moves back toward the left until it finds a blank, then, it set to one lcpynr; iii) as the lcpynr-set ends its computation, it moves to the right until it finds a zero, it sets to one ot_{blank} , then, it moves to the left until it finds a blank.

Comment: when the lcpynr-set executes its own algorithm, the tp-set contains two un_j -sets storing a zero: one has been so set in the step i), the other has been so set by the very same lcpynr-set in its journey.

The algorithm computed by the rcpynxt-set is obtained by interchanging right with left, and vice versa, and lcpynr-set with rcpynr-set in the previous one.

3. 6. 3. The component subset to select and duplicate the k-th next numeral.

The four subsets lls[n], lrs[n], rrs[n], rls[n], belonging to both the i-subset and o-subset complements, are the duplicator sets to duplicate the tp-set [n+1]-th numeral, where n must be smaller than the number of numerals contained in the tp-set and the n-th is taken with respect the left to right order, ie, the leftmost numeral is the first and, in the initial and final conditions, the one near the un_0 -set is the last. To start with, the tp-set contains h numerals separated by blanks. When the value n and one of the duplicating subset names is presented to the i-subset, the n value is written to the left or to the right of the numeral squence depending on the name first letter. That is, whereas in the lls[n]

and lrs[n] case the n is written on the left of the numeral sequence, in the rrs[n] and rls[n] case it is written on the right. Instead the name second letter tells the transform where to write the sequence [n+1]-th numeral, whether on the left, in the l case, or on the right, in the r case. In any case, the four subsets, i) duplicate the n value on one side of the numeral sequence with respect to the uny₀-set position; ii) set to blank the farthest away one of the just duplicated n value; iii) depending on the first two letters of the duplicator name, n of the blanks separating the numerals in the sequence are set to zero, ie, when the k-th one, for k smaller than n, of the n value is set to blank, then the k-th blank separating the k-th and the [k+1]-th numeral is set to zero; iv) when all the n ones representing the duplicated n have been set to blank, the [n+1]-th numeral can be copied by calling the appropriate, either the lcpynr or rcpynr, duplicating set; v) as the duplicating set has terminated its execution, all the zeros are set back to blank. As usual the four subsets terminate their journey with the uny₀-set storing the first blank on the right of the numeral sequence.

3. 6. 4. The component subset to erase a numeral.

As in the tp-set are stored many different numeral it is useful to have two subsets to substitute the numeral on the left or the numeral on the right of the uny₀-set with blanks. We call them the leraser-set and reraser-set, respectively, both belonging to the i-subset and to o-subset complements. The leraser-set components are characterized by the relations:

$$\begin{aligned} C_{leraser1, leraser2} &= C_{leraser2, leraser1} = C_{leraser3, leraser1} = C_{leraser4, leraser3} > T, \\ C_{leraser3, leraser0} &= C_{leraser1, leraser0} = C_{ot_{blank}, leraser4} = C_{R, leraser3} > T, \\ C_{leraser1, it_{blank}} &= C_{leraser2, it_{blank}} = C_{leraser3, it_{blank}} = C_{leraser4, it_{blank}} < -T, \\ C_{leraser1, it_{zero}} &= C_{leraser2, it_{zero}} = C_{leraser3, it_{zero}} = C_{leraser4, it_{zero}} < -T. \end{aligned}$$

Obviously, the reraser-set is characterized by the relations:

$$\begin{aligned} C_{reraser1, reraser2} &= C_{reraser2, reraser1} = C_{reraser3, reraser1} = C_{reraser4, reraser3} > T, \\ C_{reraser3, reraser0} &= C_{reraser1, reraser0} = C_{ot_{blank}, reraser4} = C_{L, reraser3} > T, \\ C_{reraser1, it_{blank}} &= C_{reraser2, it_{blank}} = C_{reraser3, it_{blank}} = C_{reraser4, it_{blank}} < -T, \\ C_{reraser1, it_{zero}} &= C_{reraser2, it_{zero}} = C_{reraser3, it_{zero}} = C_{reraser4, it_{zero}} < -T. \end{aligned}$$

Because we can execute a clmvr, or clrmvr depending on the tp-set content, before the leraser-set, or reraser-set, execution and because sometime it is convenient to leave the uny₀-set content as the one left by the eraser execution, then, we prefer to terminate the erasers as done, ie, not with the uny₀-set storing the first blank on the right of the numeral sequence. An easy exercise, left to the interested reader, is to characterize

the set to substitute a sequence of zeros, of unknown length, with a sequence of blanks having the same length.

4. SOME OF THE HEBB TRANSFORM PROPERTIES.

We call adaptable the vector component h^* if at least one of the $c_{h^*,k}$, for all k , is an Hebbian element. We call originator the vector component k^* if at least one of the c_{h,k^*} , for all h , is an Hebbian element. Of course, a component can be adaptable and originator at the same time. We call non-Hebbian a component h^* if neither $c_{h^*,k}$, for all k , nor c_{h,h^*} , for all h , are Hebbian elements. Once chosen a suitable set of values for the Hebbian parameters, the adaptable component h^* , belonging to the vector $f_{h,t+1}$, is said to have been trained or to have learned to compute also either the AND, or the OR, of the vector $f_{k,t}$ originator components k_1, k_2, \dots, k_p if the $c_{h^*,k_1}, c_{h^*,k_2}, \dots, c_{h^*,k_p}$ Hebbian elements become frozen for values either smaller or no smaller than T .

As the Hebb transform is applied only to the $\|c_{h,k}\|$ positive elements and the Hebbian element can be frozen only on positive values, then, an adaptable component can be trained to compute either the AND or the OR of any given set of originator components. However, once chosen suitable values for the Hebbian parameters, we can give a component set such that the adaptable component h^* , belonging to the vector $f_{h,t+1}$, can be trained to compute, also, the logical negation either of the AND, or of the OR, of the vector $f_{k,t}$ originator components k_1, k_2, \dots, k_p . For short, as the set can be trained to compute the negation, we call it the n -set. A n -set trainable in the negation of the AND connective is characterized by the Hebbian elements frozen at the values:

$$\begin{aligned} c_{h^*,k_1} &= c_{h^*,k_2} = \dots = c_{h^*,k_p} = T/p \\ c_{h,h^*} &< -T \\ c_{h,e} &> T \\ c_{h^*,k} &= 0 \text{ for } k \text{ different from } k_1, k_2, \dots, k_p \\ c_{h,k} &= 0 \text{ for } k \text{ different from } h^* \text{ and } e. \end{aligned}$$

A n -set trainable in the negation of the OR connective is characterized by the Hebbian elements frozen at the values:

$$\begin{aligned} c_{h^*,k_1} &= c_{h^*,k_2} = \dots = c_{h^*,k_p} > T \\ c_{h,h^*} &< -T \\ c_{h,e} &> T \\ c_{h^*,k} &= 0 \text{ for } k \text{ different from } k_1, k_2, \dots, k_p \\ c_{h,k} &= 0 \text{ for } k \text{ different from } h^* \text{ and } e. \end{aligned}$$

To compute the negation of a connective, either an AND or an OR, a n -set requires two iterations, as the reader can easily verify.

With the n -set characterization, we have actually proved the existence of an universal learning procedure for the Caianiello-Hebb transform.

5. SOME OF THE CAIANIELLO-HEBB TRANSFORM PROPERTIES.

To obtain the sufficient conditions for a transformation to be adaptable, we introduce the "assembly". That is, a component set composed by the f -set, the r_p -set, the s -set, the q -set, defined in 3., plus a component set assuming the identifier value $a_{i_h+1}a_{i_h+2} \dots a_{i_h+j} \dots a_{i_h+m}$, for i and h given, one iteration after either the or_1 or the rst component has assumed the value one. We did not give the component set assuming as value the identifier, for short the id -set, as it depends on the chosen numeral base: the interested reader is warmly urged to figure out one. Moreover, in an assembly the st and ist are the adaptable components and or_1, or_2, \dots, or_p are the originator, instead the assembly remaining components are non-Hebbian. That is, $c_{st, or_1}, c_{st, or_2}, c_{st, or_3}, \dots, c_{st, or_p}, c_{ist, or_1}, c_{ist, or_2}, \dots, c_{ist, or_p}$, are the assembly only variable matrix elements. We call "conditional assembly" a component set composed by the f -set, the cr_p -set, the s -set, the q -set, defined in 3., plus a component set assuming the identifier value $a_{i_h+1}a_{i_h+2} \dots a_{i_h+j} \dots a_{i_h+m}$, for i and h given, one iteration after either the or_1 or the rst component has assumed the value one. In a conditional assembly the Hebbian elements are $c_{st, or_1}, c_{st, or_2}, c_{st, or_3}, \dots, c_{st, or_p}, c_{ist, or_1}, c_{ist, or_2}, \dots, c_{ist, or_p}$, together with $c_{trdtlstr, it}$. Eventually, we call "primitive" an assembly without the s -set, without the q -set and with p equal one, ie, with just one frozen or component belonging to the o subset. To simplify our notations we have presented the assemblies and primitives without indices, however, as there could be many of them we shall give their components and the corresponding matrix elements with indices, as the occasion arise.

We have discussed the one assembly Caianiello-Hebb transform: easily we can introduce a multi-assemblies transform. To this end we associate to each assembly an identifier, ie, to each assembly is associated, in a one-to-one correspondence, a component id -subset assuming the identifier value, as before one iteration after either the or_1 or the rst component has assumed the value one. That is, we choose, by devising the id -sets, as many different identifiers as assemblies there are in the adaptable transform and then associate them in a one-to-one correspondence. Eventually, in each assembly the s -set can store the identifier of any other assembly and for each st , and ist , component there are as many or_1, or_2, \dots, or_p sets as assemblies there are in the adaptable transform. Moreover, there are as many st and ist components as assemblies. As each assembly has its own distinctive identifier, the matrix elements $c_{st, pi}$ and $c_{ist, ni}$ must chosen so that the st and the ist components, belonging to the assembly with the identifier a^* , assume the value one just one iteration after the pi_u and ni_v components assume the coded value a^* . In other words, if in the coded representation of a^* the u -th digit is a one, then, pi_u assumes the value one, ni_u the value zero, c_{st, pi_u} must be greater than T and c_{st, ni_u} must be equal to zero. And if the v -th digit of the coded representation of a^* is zero, then, ni_v assumes the value one, pi_v the value zero, c_{ist, ni_v}

must be greater than T and c_{ist, pi_v} must be equal to zero. Instead, c_{st, or_p} and c_{ist, or_p} must remain greater than T .

For simplicity sake and without any loss of generality, we consider each of the two mutually exclusive i subsets, the first containing the elements pi_u and the second containing the elements ni_v , as the union of two mutually exclusive subsets: the acoustic and the visual subsets. That is, we can talk about the acoustic, or about the visual, i -components or, for short, components, specifying if they are pi_u or ni_v elements only to avoid ambiguities.

As we have proved in the chapter 4. the st and the ist components can be trained to compute the AND and the OR connectives. That is, eventually the q_f component can compute the AND, the OR, the negation of the AND and the negation of the OR of the or_1, or_2, \dots, or_p components belonging to all the assemblies. In other words, a multi-assemblies Caianiello-Hebb transform can be trained to compute any combination of the said connectives, their number depending on the number of assemblies and, ultimately, on the vector dimension. However, to compute a function f we need some unbounded store to record the intermediate and final results without unduly restricting the number of digits the numerals can have. To solve this problem we can either associate to the multi-assemblies Caianiello-Hebb transform something akin to a Turing-machine tape, ie, an unbounded as well as structured environment. Or we can have the Caianiello-Hebb transform to increase automatically, when needed, the vector and the matrix dimensions so the newly created components can store the intermediate results. Whereas the former solution requires the codification from the o subset of some quite unmathematical entity, e. g. "erase" and the like, for the latter it is sufficient to code the numerals and the function identifiers into the i and from the o subsets. It is worth to recalling that the Hebb transform projects a matrix set into itself, changing the Caianiello transform matrix. That is, in a Caianiello-Hebb transform the matrix does change anyway, at every iteration.

As an explicative example, we present a particular Caianiello-Hebb, or CH, transform together with the procedure to obtain an adaptable transform. The CH has a finite number of assemblies with p equal two and one primitive with p equal one. The code defined on the o subset is the unary code, ie, zero is represented by the primitive or_1 , ie, by the o component equal to one for one iteration, one is represented by the o component equal to one for two consecutive iterations and so on. Two consecutive digits are separated by the o component equal to zero for at least one iteration. In the CH there are the components $ac1_u, ac2_u, vs1_u, vs2_u, nac1_u, nac2_u, nvs1_u, nvs2_u$, for u greater than zero and smaller than eight, with a seven-bit ASCII code defined on them. That is, for u greater than zero and smaller than eight, whereas $ac1_u, vs1_u, nac1_u, nvs1_u$, assumes the value one every time a one has been coded, $ac2_u, vs2_u, nac2_u, nvs2_u$, assumes the value one every time a zero has been coded. To take into account the

other cases, e. g. when both $ac1_u$ and $ac2_u$, or both $vs1_u$ and $vs2_u$ assume the value one at the same iteration, there is a component set, the z-subset, for each u so characterized:

$$\begin{aligned}
 c_{1ac1_u, ac1_u} &= c_{pi_u, 1ac1_u} = c_{1ac2_u, ac2_u} = c_{pi_{8+u}, 1ac2_u} = c_{1vs1_u, vs1_u} = \\
 &= c_{pi_{16+u}, 1vs1_u} = c_{1vs2_u, vs2_u} = c_{pi_{24+u}, 1vs2_u} = \\
 &= c_{1nac1_u, nac1_u} = c_{ni_u, 1nac1_u} = c_{1nac2_u, nac2_u} = c_{ni_{8+u}, 1nac2_u} = \\
 &= c_{1nvs1_u, nvs1_u} = c_{ni_{16+u}, 1nvs1_u} = c_{1nvs2_u, nvs2_u} = c_{ni_{24+u}, 1nvs2_u} > T \\
 \\
 c_{2ac1_u, ac1_u} &= c_{2ac2_u, ac2_u} = c_{2vs1_u, vs1_u} = c_{2vs2_u, vs2_u} = \\
 &= c_{2nac1_u, nac1_u} = c_{2nac2_u, nac2_u} = c_{2nvs1_u, nvs1_u} = c_{2nvs2_u, nvs2_u} = T/2 \\
 \\
 c_{pi_u, 2ac1_u} &= c_{pi_{8+u}, 2ac1_u} = c_{pi_{16+u}, 2vs1_u} = c_{pi_{24+u}, 2vs1_u} = c_{ni_u, 2nac1_u} = \\
 &= c_{ni_{8+u}, 2nac1_u} = c_{ni_{16+u}, 2nvs1_u} = c_{ni_{24+u}, 2nvs1_u} < -T.
 \end{aligned}$$

The CH can be made to converge, from the iteration t^* on, to the correspondence between the numeral names and their unary representations. That is, if the i components assume, starting at iteration t' greater than t^* , the value corresponding, in the given code, to the name "one", then, the o component assumes, after a finite number of iterations following t' , the value one for two consecutive iterations. If the former assume the value corresponding to the name "three", after the iteration t'' greater than t^* , then, the latter assumes the value one for four consecutive iterations, after t'' . And so on. The procedure to have CH converging, ie, to train CH on the said correspondence is quite simple. Let us call "p" the primitive identifier and "one", "two", "three" and so on the assemblies identifiers. Then, for a number of iterations, depending on the Hebbian parameters, the values corresponding, in the given code to the sequence "one", must be assumed either by the acoustic or by the visual subset, and to the sequence "pp", either the by visual or the by acoustic subset. Unfortunately, there is no rule to map the Hebbian parameter values into the iteration cadence with which the i components have to assume the said values, or vice versa, and only through the empirical evidence we can pinpoint the correspondence. However once fixed the latter, it is sufficient the repeat the same procedure for the sequences "one" and "pp", "two" and "pone", or "two and "onep", "three" and "oneone", or "three" and either "ptwo" or "twop" and so on, to have the CH converging to the desired correspondence mapping numeral names into their unary representation.

6. SUFFICIENT CONDITIONS FOR AN ADAPTABLE TRANSFORM.

6.1. On The tp-set Accesses.

Let us consider a Caianiello-Hebb transform with: i) a number of assemblies and conditional assemblies sufficient to execute the required task, ii) the seven $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7$ as the only components of the o-subset, iii) a tp-set and its controlling primitives with the respective originators: L, R, P, callmvr, clrmvr, callRmvr, calRmvr, lcpynr, rcpynr, LCPY, RCPY, lcpynxt, rcpynxt, ot_{blank}, ot_{one}, ot_{zero}, leraser0, reraser0, iv) the it-set components it_{blank}, it_{one} and it_{zero} to read through the $0uny_0$ and $1uny_0$ state the tp-set content, v) the it components it₀, lit₁, lit₂, ..., lit_j, and the symmetrical rit₁, rit₂, ..., assuming the value one whenever the first-left, second-left, ..., [j-th]-left, respectively the first-right, second-right, ..., tp-set condition is verified, see 3. 6. 0., together with the rstcr_p-set.

Let the transform acoustic i-subset contains the components ia_{blank}, ia_{one}, ia_{zero}, ia₁, ia₂, ..., ia₇. Whereas the last seven code the f function identifier into the seven bit ASCII code, one symbol at each iteration, the first three assume the value one when the f function independent variable has the value blank, one, zero, respectively. The ia_{blank} assumes the value one whenever either ia_{one} or ia_{zero} does not assume the value one, ie, ia_{blank} computes the negation of either ia_{one} or ia_{zero}.

Let the transform visual i-subset contain the components iv_{blank}, iv_{one}, iv_{zero}, iv₁, iv₂, ..., iv₇. Whereas the last seven code the f function identifier into the seven bit ASCII code, one symbol at each iteration, the first three assume the value one when the f function independent variable has the value blank, one, zero, respectively. The iv_{blank} assumes the value one whenever either iv_{one} or iv_{zero} does not assume the value one, ie, iv_{blank} computes the negation of either iv_{one} or iv_{zero}.

For simplicity sake, we continue to represent numbers in the unary notation, the zero being the separator between consecutive numerals. E. g., ia_{zero}, respectively iv_{zero}, equal to one separates two consecutive sequences of ia_{one}, respectively iv_{one}, equal to one. The relations between ia_{blank}, ia_{one}, ia_{zero}, iv_{blank}, iv_{one}, iv_{zero} and L, R, ot_{blank}, ot_{one}, ot_{zero} are:

$$\begin{aligned}
 C_{ia_{blank}, ot_{blank}} &= C_{ia_{one}, ot_{blank}} = C_{ia_{zero}, ot_{blank}} = C_{iv_{blank}, ot_{blank}} = C_{iv_{one}, ot_{blank}} = \\
 &= C_{iv_{zero}, ot_{blank}} = C_{ia_{blank}, ot_{one}} = C_{ia_{one}, ot_{one}} = C_{ia_{zero}, ot_{one}} = C_{iv_{blank}, ot_{one}} = \\
 &= C_{iv_{one}, ot_{one}} = C_{iv_{zero}, ot_{one}} = C_{ia_{blank}, ot_{zero}} = C_{ia_{one}, ot_{zero}} = C_{ia_{zero}, ot_{zero}} = \\
 &= C_{iv_{blank}, ot_{zero}} = C_{iv_{one}, ot_{zero}} = C_{iv_{zero}, ot_{zero}} = \\
 &= C_{ia_{blank}, L} = C_{ia_{one}, L} = C_{ia_{zero}, L} = C_{iv_{blank}, L} = C_{iv_{one}, L} = C_{iv_{zero}, L} = \\
 &= C_{ia_{blank}, R} = C_{ia_{one}, R} = C_{ia_{zero}, R} = C_{iv_{blank}, R} = C_{iv_{one}, R} = C_{iv_{zero}, R} < -T \\
 \\
 C_{ot_{blank}, ia_{blank}} &= C_{ot_{one}, ia_{one}} = C_{ot_{zero}, ia_{zero}} = C_{ot_{blank}, iv_{blank}} = C_{ot_{one}, iv_{one}} =
 \end{aligned}$$

$$= c_{ot_{zero}, iv_{zero}} = c_{tab, ia_{blank}} = c_{tao, ia_{one}} = c_{taz, ia_{zero}} = c_{tvb, iv_{blank}} = c_{tvo, iv_{one}} = \\ = c_{tvz, iv_{zero}} > T$$

$$c_L, tab = c_L, tao = c_L, taz = c_L, tvb = c_L, tvo = c_L, tvz = c_L, ot_{blank} = c_L, ot_{one} = \\ = c_L, ot_{zero} = T/2,$$

we have chosen them so as to avoid jumbling the tp-set content. That is, if one, among $ia_{blank}, ia_{one}, ia_{zero}, iv_{blank}, iv_{one}, iv_{zero}$, has the value one at the iteration t , then, the component ot_{blank} or ot_{one} or ot_{zero} , respectively, assumes the value one at the iteration t plus one and the L component assumes the value one at t plus two. Meanwhile all the $ia_{blank}, ia_{one}, ia_{zero}, iv_{blank}, iv_{one}, iv_{zero}$, assume the value zero. In other words, we can feed a new digit into the tp-set as soon as the previous one has been first stored into the uny_0 -set and then shifted to the left into the uny_{-1} -set.

6.1.1. The P primitive.

Now let us give the relations coupling the components it_{blank}, it_{one} and it_{zero} , needed to read the numerals from the tp-set into the transform seven o-subset components $or_1, or_2, or_3, or_4, or_6$ and or_7 . To this end it is worth to recall the ASCII code for the blank, the digit zero and the digit one: they are thirty-two, forty-eight and forty-nine, respectively. In turn, we can represent the latter by means of the seven digit binary numerals: 0010000, 0110000 and 0110001, respectively. That is, if or_1 represents the most and or_7 the least significative digit, the corresponding matrix elements are:

$$c_{O_1, it_{blank}} = c_{O_1, it_{one}} = c_{O_1, it_{zero}} = c_{O_4, it_{blank}} = c_{O_4, it_{one}} = c_{O_4, it_{zero}} = \\ = c_{O_5, it_{blank}} = c_{O_5, it_{one}} = c_{O_5, it_{zero}} = c_{O_6, it_{blank}} = c_{O_6, it_{one}} = c_{O_6, it_{zero}} = \\ = c_{T4P, T5P} = c_{T3P, T5P} = c_{T3P, it_{blank}} = c_{T4P, it_{blank}} = c_{TP, it_{blank}} = \\ = c_{O_2, it_{blank}} = c_{O_7, it_{blank}} = c_{O_7, it_{zero}} < -T \\ c_{T5P, it_{blank}} = c_{T2P, TP} = c_{T1P, P} = c_{TP, P} = c_{TP, TP} = c_{O_3, it_{blank}} = c_R, TP = c_R, P = \\ = c_L, TP = c_L, P = c_L, T6P = c_L, T4P = c_L, T3P = c_R, T6P = c_R, T4P = c_R, T3P > T \\ c_{O_3, it_{one}} = c_{O_3, it_{zero}} = c_{O_2, it_{zero}} = c_{O_2, it_{one}} = c_{O_7, it_{one}} = \\ = c_{O_3, P} = c_{O_3, P} = c_{O_2, P} = c_{O_2, P} = c_{O_7, P} = c_{O_3, TP} = c_{O_3, TP} = c_{O_2, TP} = \\ = c_{O_2, TP} = c_{O_7, TP} = c_{O_3, T1P} = c_{O_3, T1P} = c_{O_2, T1P} = c_{O_2, T1P} = c_{O_7, T1P} = \\ = c_{T6P, T2P} = c_{T6P, it_{blank}} = c_{T4P, T3P} = c_{T3P, T4P} = c_{T3P, T6P} = c_{T3P, it_{zero}} = \\ = c_{T3P, it_{one}} = c_{T4P, it_{zero}} = c_{T4P, it_{one}} = T/2,$$

where P is the primitive to set to one to execute the desired transfer of the tp-set into the transform o-subset.

6.2. Training The Adaptable Transform On Some Elementary Arithmetic Operation.

To train the adaptable transform on the execution of any function f , we must set either the acoustic or the visual i components to the name chosen to identify f and either the visual or the acoustic i components to its independent variable value. As we are interested to train the adaptable transform in the elementary arithmetic operations, the ia -set shall represent the operation sign, ie, we choose to represent in the ia_1, ia_2, \dots, ia_7 the ASCII code for the elementary arithmetic operators. Instead, we represent in the iv_{one} equal to one sequences the operand values, with iv_{zero} equal to one as the sign separating two consecutive numerals.

6. 2. 1. The addition case.

To simplify the transform training on the other functions, it is convenient to break the present one into two different steps: first, the transform learns to execute the task called "sumEnd", then, it is trained in the sum execution.

To start with, the iv_{one} and iv_{zero} components are set to the operand values, so that they can be saved into the tp -set at the uny_0 -set left, ie, after they have been stored the uny_0 -set stores the first blank on their right. Instead, sumEnd starts with two copies of the numerals at the uny_0 -set left and computes the algorithm: whereas i) the ia -subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "sumEnd", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on an assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive sequence: ii) calrmvr, iii) ot_{one} ; iv) callmvr; v) R; vi) ot_{blank} ; vii) R; viii) ot_{blank} ; ix) P. Now let us suppose that the steps i) to ix) are repeated, in the given order, with a cadence and for a number of times, dependent on the Hebbian parameters, sufficient to freeze the matrix Hebbian elements having as their second indices the assembly sumEnd eight ordinary components and, respectively, as their first indices the values: calrmvr, ot_{one} , callmvr, R, ot_{blank} , R, ot_{blank} , P. Let t^* be the number of iterations it takes to freeze the said matrix elements, ie, after t^* iterations the adaptable transform converges to sumEnd, ie, it has been trained on the sumEnd execution. It is worth to note that the above given are by no means the only values assumed by the ia -subset and iv -subset during the t^* iterations: they are just those of interest for us. In all the other iterations they can assume any value whatever but for the values with exactly the contrary effects on the matrix above given Hebbian elements.

Now we can present the transform training on the two unary numeral addition. The initial tp -set conditions are: the uny_0 -set stores the first blank on the numeral to add right. Whereas the ia -subset is set to the "+" symbol ASCII code, contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial

transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive and to the assembly identifier sequence: i) RCPY; ii) sumEnd. Now let us suppose that the steps i) to ii) are repeated, in the given order, with a cadence and for a number of times, dependent on the Hebbian parameters, sufficient to frozen the matrix Hebbian elements having as their second indices the + assembly two ordinary components and, respectively, as their first indices the values: RCPY, sumEnd. Let t^{**} be the number of iterations it takes to freeze the matrix above given Hebbian components, ie, after t^* plus t^{**} the adaptable transform can be made to converge on the addition.

6.2.2. The multiplication case.

As for the addition, also for the product in the initial conditions the unary numerals are stored in the tp -set at the left of the uny_0 -set. The adaptable transform training on the product is a three steps process. In the first step we train an assembly to execute the algorithm: whereas i) the ia -subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "initialTransient", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive identifier sequence: ii) $rcpynr$; iii) L; iv) ot_{blank} ; v) $clRmvr$; vi) $lcpynr$; vii) $cllmvr$; viii) R; ix) R; x) ot_{blank} ; xi) L; xii) L; xiii) ot_{zero} ; xiv) ot_{blank} ; xv) ot_{zero} . That is, in a left to right direction the tp -set present content is: finitely many blanks, a numeral equal to the first factor minus three; a blank; a one; two consecutive zeros; the first factor; a blank; the second factor; a blank; a numeral equal to the second factor minus one, finitely many blanks. The uny_0 -set and uny_{-1} -set present content is zero. To execute the sequence i) to xiv) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to xv), in the order, and as second index the assembly identifier "initialTransient".

In the second step, with the help of a conditional assembly we train the adaptable transform to control the repetitive body and the conditions to enter into the final transient of the multiplication algorithm. To train the adaptable transform to compute the loop scope we follow the procededure: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "cyclicBody", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on an assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive and to the assembly identifier sequence: ii) R; iii) R; iv) R; v) $clLmvr$; vi) $rcpynxt$; vii) sumEnd; viii) $clRmvr$; ix) L; x) ot_{blank} ; xi) $cllmvr$; xii) L; xiii) L; xiv) L. To execute the sequence i) to xiv) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to xiv), in the order, and as second index the assembly identifier "cyclicBody".

However, as the scope must be executed again and again until the first condition becomes false, we must train the transform in the procedure: whereas a) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "repetitionControl", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the assembly identifier sequence: ii) cyclicBody; iii) repetitionControl. To execute the sequence i) to iii) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) and iii), in the order, and as second index the conditional assembly identifier "repetitionControl". The conditional assembly is organized so that it repeats its own activity depending on the true or falsity of the first condition, see 3. 6. 0. In turn, the latter is resetted automatically by the rstlitlcr_p-set as soon as the rightmost one of the leftmost numeral stored in the tp-set becomes a blank. As the tp-set is resetted, the first condition is falsified and the conditional assembly resetting component rst assumes the value one. Eventually, the tp-set exit conditions are: the operands, separated by a blank; a blank; the result, ie, the operand sum. The uny₀-set stores the first blank at the left of the first operand, ie, it has the operands at its right.

The third step simply reset the system, ie, the tp-set content is shifted toward the left so the algorithm terminates with the uny₀-set storing the first blank at the right of the product. That is, whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "productEnd", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive identifier sequence: ii) clLmvr; iii) P. To execute the sequence i) to iii) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii), iii) and as second index the assembly identifier "productEnd".

To conclude the adaptable transform training we follow the procedure: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol "+", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the assembly identifier sequence: ii) initialTransient; iii) repetitionControl; iv) productEnd. To execute the sequence i) to vi) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to iv) and as second index the assembly identifier "+".

6. 2. 3. The minimalization schema.

To discuss how to train the adaptable transform on the execution of the minimalization schema, first, we must discuss the initial conditions. We must have an

adaptable transform converging on the computation of the $m+1$ variable function f , identified by the sequence "function". That is, the transform must converge to a tp-set content with the leftmost numeral equal to the $m+1$ -th variable smallest integer value, the μ value, for which f is equal to zero, if such a value exists. Otherwise it is undefined. Going in a left to right direction, the tp-set initially contains finitely many blanks, m numerals, ie, f first m variable values, separated as usual by blanks, a blank, a one, ie, the $[m+1]$ -th variable initial value, finitely many blanks. The uny_0 -set initially stores the first blank on the right of the $[m+1]$ -th numeral, ie, the latter is at the former left.

The procedure to train the adaptable transform on the minimalization schema starts with the initial step: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol "muInitialTransient", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive identifier sequence: ii) L; iii) ot_{one} ; iv) L; v) ot_{zero} ; vi) L; vii) ot_{zero} ; viii) L; ix) ot_{zero} . To execute the sequence i) to ix) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) and ix) and as second index the assembly identifier "muInitialTransient". After the execution of the sequence ii), to ix), in the left to right direction, the tp-set contains: finitely many blanks, the same first m numerals as before, a blank, a one, a blank, a one, three zeros, finitely many blanks. The uny_0 -set stores the rightmost zero.

The procedure to train the adaptable transform on the minimalization schema loop scope is the following: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol "muCyclicBody", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive and to the assembly identifier sequence: ii) ot_{blank} ; iii) R; iv) ot_{blank} ; v) R; vi) ot_{blank} ; vii) $l_{eraser0}$; viii) ot_{one} ; ix) function; x) L; xi) ot_{zero} ; xii) R; xiii) ot_{zero} ; xiv) R; xv) ot_{blank} ; xvi) ot_{zero} ; xvii) R; xviii) L; xix) L; xx) L. First comment: after the step viii) the tp-set contains again $m+1$ numerals and the rightmost, ie, the $[m+1]$ -th is one unity greater than before the step ii). Second comment: after the steps xviii) to xx) the lit_2 assumes the value one if the second condition, see 3. 6. 0., is verified; however, the second condition is true only if the value of f is zero. To execute the sequence i) to xx) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to xx) and as second index the assembly identifier "muCyclicBody".

However, as the scope must be executed again and again until the first condition becomes false, we must train the transform in the procedure: whereas a) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol sequence "muCyclicControl", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values

and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the assembly identifier sequence: ii) `muCyclicBody`; iii) `muCyclicControl`. To execute the sequence i) to iii) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) and iii) and as second index the assembly identifier "`muCyclicControl`". The loop exit conditions are: in the left to right direction the `tp`-set stores finitely many blanks, the original first m numerals, the $[m+1]$ -th numeral, ie, the smallest value for which f is equal to zero, finitely many blanks as we have subtracted one from the computed f value. The `uny0`-set stores the third blank at the right of the rightmost one.

The procedure to train the adaptable transform on the minimalization schema concluding transient is the following: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol "`muFinalTransient`", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the primitive identifier sequence: ii) `R`; iii) `R`; iv) `P`. To execute the sequence i) to iv) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to iv) and as second index the assembly identifier "`muFinalTransient`".

To conclude the procedure to train the adaptable transform on the minimalization schema is the following: whereas i) the acoustic subset is set to the ASCII code for the symbol "`muSchema`", contemporaneously, ie, with a delay, dependent both on the Hebbian parameter values and on the assembly initial transients, the visual subset is set to the values corresponding to the assembly identifier sequence: ii) `muInitialTransient`; iii) `muCyclicControl`; iv) `muFinalTransient`. To execute the sequence i) to iv) is the procedure to repeat a number of times sufficient to freeze the matrix elements having as first index the name of the primitives ii) to iv) and as second index the assembly identifier "`muSchema`".

6. 2. 4. The substitution schema.

To evaluate the function $f[g_1[m_1], g_2[m_2], \dots, g_n[m_n]]$, m_j being the number of g_j variables, first, for all j greater than zero and smaller than n plus one, we evaluate $g_j[m_j]$, set to blank the `tp`-set and read from the `o`-subset the numeral g_j^* . Second, we set the `i`-subset to the n numerals g_j^* and to the `f` identifier. Once this has been done, if the adaptable transform has been previously trained to compute f , then, after a finite number of iterations we shall read the f^* value in the `o`-subset. Otherwise, first we train the transform to compute f , independently of the g_j^* evaluation, then, we evaluate the substitution schema with the function f . We leave to the interested reader to automatize with the eventual help of the duplicators, the evaluation of the substitution schema

6. 3. Conclusions.

For completeness, we have discussed the adaptable transformation convergence to functions terminating with the primitive P, ie, with the execution of an algorithm to duplicate into the o-subset the rightmost numeral stored in the tp-set. However, such a conclusion is correct only if the tp-set rightmost numeral is also the value assumed by the function the adaptable transform has to compute. In other words, if the latter function is obtained by composition with either the minimalization or the substitution schemata, or both, then, it is better to train the transform on two instances of each function. The first terminating with the P primitive. The second without the P primitive. Whereas the former can be inserted in the composite function body, the latter can be its terminating function.

7. THE SYMBOL MEANING.

To help the reader we list the matrix element and the vector component meanings as they have been introduced in the adaptable transform presentation.

2. The CAIANIELLO Transform.

$f_{h,t+1}$, $f_{k,t}$ represent the h, respectively the k, component at the iteration t+1, t;
 $1 < a$, $0 < b < 1$, $0 < d < 1$ and $0 < g < 1$ are the Hebbian parameters.

$c_{h,k}$, represents a non-Hebbian matrix element for generic h and k;

$c_{h,k,t}$ represent an Hebbian matrix element at the iteration t, h an adaptable component, k an originator.

MATRIX ELEMENT

VECTOR COMPONENT

3.1. CONNECTIVES.

c_{h,k_1} , c_{h,k_2} , ..., c_{h,k_p}

k_1 , k_2 , ..., k_p compute the logical connectives AND and OR;

c_{e,k_0}

e is the EXISTENTIAL quantifier and its value is one if k_0 was one at the least once in a preceding iteration.

3.2. STORE s-set.

c_{s_j, q_1} , $c_{s_j, r}$, $c_{s_j, a_{i_1+j}}$, $c_{s_j, a_{i_2+j}}$, ..., $c_{s_j, a_{i_M+j}}$

s_j assumes one of the values a_{i_1+j} , a_{i_2+j} , ..., a_{i_M+j} ;

c_{r, or_1} , c_{r, or_2} , ..., c_{r, or_p} , $c_{l_1, r}$, c_{l_2, l_1} , c_{l_3, l_2} ,

or_1 , or_2 , ..., or_p are the "originators", see 3.3.;

c_{l_4, l_3} , c_{l_4, l_4} , $c_{l_4, q}$

r compute the OR of or_1, \dots, or_p ;
 q_q is defined in 3. 4. as the EQUAL
 reset component, l_1, l_2, l_3 are delay
 components;
 l_4 resets the STORE;

3.3. COUNTER r_p -set.

c_{q, q_q}, c_{q, q_f}	q computes the OR of q_q , defined in 3. 4. as the EQUAL reset component, and q_f , defined in 3.5. third but last relation as the FILTER component starting the reset process;
$c_{or_1, q}, c_{or_1, ih_1}, c_{or_1, ih_2}, \dots, c_{or_1, ih_p}, c_{ih_1, q},$ $c_{ih_1, or_1},$	or_1, or_2, \dots, or_p are the "originators";
$c_{ih_1, ih_1}, c_{dl_1, ih_1}, c_{or_2, ih_1}, c_{or_2, dl_1}, c_{ih_2, q},$ $c_{ih_2, or_2},$	ih_1, ih_2, \dots, ih_p are the r_p -set inhibitory components;
$c_{ih_2, ih_2}, \dots, c_{dl_{p-1}, ih_{p-1}}, c_{or_p, ih_{p-1}}, c_{or_p, dl_{p-1}},$ $c_{ih_p, q},$	dl_1, dl_2, \dots, dl_p are the r_p -set delay components;
$c_{ih_p, or_p}, c_{ih_p, ih_p}, c_{dl_p, ih_p}, c_{rst, ih_p}, c_{rst, dl_p}$	rst resets the COUNTER;

3.4. EQUAL q -set.

$c_{q_i, x_i}, c_{q_i, y_i}, c_{q_1, e}$	q_i computes the x_i and y_i logical negation;
$c_{q'_i, x_i}, c_{q'_i, y_i}$	q'_i computes the x_i and y_i AND;
$c_{xor, q_i}, c_{xor, q'_i}$	xor computes the q_i and q'_i AND, for all i ;
$c_{q_q, xor}, c_{q_q, l_4}, c_{q_q, q_q}$	q_q resets the EQUAL and computes the AND of xor and l_4 , see 3.2.

3.5. FILTER f -set.

$c_{st, pi_u}, c_{st, or_p}$	st is the "starter" and computes the or_p , see 3.2., and pi_u , the positive i - subset components, OR, for all u and p ;
$c_{ist, ni_v}, c_{ist, or_p}$	ist is the "i-starter" and computes the or_p , see 3.2., and ni_v , the negative i -

$C_{h,ist}$, $C_{h,e}$
 C_j , st , C_{qf} , h , $C_{qf,j}$

$C_{st,trd}$, $C_{ist,trd}$, $C_{trd,qf}$, $C_{trd,trd}$
 $C_{trd,rst}$

subset components, OR, for all v
 and p ;
 h computes ist logical negation;
 qf computes the AND of the ist
 logical negation and of the st ;
 j is a delay component;
 trd resets the FILTER;
 rst resets the COUNTER, see 3.3.

3.6. TAPE tp-set.

uny_j is defined for $-(UNY + 1) < j < UNY + 1$ with the constant $UNY > 0$;

if $dr1uny_{UNY}$, $dr0uny_{UNY}$, $dl1uny_{-UNY}$, $dl0uny_{-UNY}$ are taken, respectively, equal to $N-3$, $N-2$, $N-1$, N , then, UNY is automatically set to the new value every time the vector dimension has to be increased;

$C_{0uny_j, 0uny_j}$, $C_{0uny_j, dl0uny_{j+1}}$,
 $C_{0uny_j, dr0uny_{j-1}}$, $C_{1uny_j, 1uny_j}$,
 $C_{1uny_j, dl1uny_{j+1}}$, $C_{1uny_j, dr1uny_{j-1}}$,
 $C_{0uny_j, l0uny_j}$, $C_{0uny_j, r0uny_j}$

 $C_{1uny_j, l1uny_j}$, $C_{1uny_j, r1uny_j}$, $C_{l0uny_j, 0uny_j}$,

 $C_{r0uny_j, 0uny_j}$,

 $C_{l1uny_j, 1uny_j}$, $C_{r1uny_j, 1uny_j}$, $C_{l0uny_j, L}$,
 $C_{r0uny_j, R}$, $C_{l1uny_j, L}$,

 $C_{r1uny_j, R}$, $C_{l0uny_j, dl0uny_j}$, $C_{r0uny_j, dr0uny_j}$,
 $C_{l1uny_j, dl1uny_j}$,
 $C_{r1uny_j, dr1uny_j}$, $C_{dl0uny_j, l0uny_j}$,
 $C_{dr0uny_j, r0uny_j}$, $C_{dl1uny_j, l1uny_j}$,
 $C_{dr1uny_j, r1uny_j}$,
 $C_{luny_0, ot_{one}}$, $C_{0uny_0, ot_{zero}}$, $C_{luny_0, ot_{blank}}$,
 $C_{0uny_0, ot_{blank}}$

 $C_{it_{one}, 1uny_0}$, $C_{it_{zero}, 0uny_0}$, $C_{it_{blank}, 1uny_0}$,

$0uny_j$, $1uny_j$, is the store for the
 zero, one, value;
 $r0uny_j$, $r1uny_j$, computes the R and
 $0uny_j$, $1uny_j$, AND, then copies itself
 into $dr0uny_j$, $dr1uny_j$, and inhibits
 $0uny_j$, $1uny_j$;
 $l0uny_j$, $l1uny_j$, computes the L and
 $0uny_j$,
 $1uny_j$, AND, then copies itself into
 $dl0uny_j$, $dl1uny_j$, and inhibits $0uny_j$,
 $1uny_j$;
 $dr0uny_j$, $dr1uny_j$, $dl0uny_j$, $dl1uny_j$,
 copies itself into $0uny_{j+1}$, $1uny_{j+1}$,
 $0uny_{j-1}$, $1uny_{j-1}$, and inhibits $r0uny_j$,
 $r1uny_j$, $l0uny_j$, $l1uny_j$;
 L is a primitive command to copy
 uny_j into uny_{j-1} ;
 R is a primitive command to copy
 uny_j into uny_{j+1} ;
 ot_{blank} , ot_{one} , ot_{zero} , performs the
 set writing access through $0uny_0$,
 $1uny_0$;
 it_{blank} , it_{one} , it_{zero} , performs the tp-

$C_{it_{blank}}, 0_{uny_0}, C_{it_{blank}}, e$

set reading access through 0_{uny_0} ,
 1_{uny_0} ;
 $dr1_{uny_UNY}, dr0_{uny_UNY}$,
 $dl1_{uny_UNY}, dl0_{uny_UNY}$ when at
the least one of them is in the state
one the matrix is automatically
bordered and the vector dimension
increased;

3. 6. 0. CONDITIONAL COUNTER cr_p -set.

$C_{or_1}, trdtstr, C_{ih_1}, trdtstr, C_{trddl_1}, trdtstr$,
 $C_{or_2}, trddl_1, C_{ih_2}, trdtstr, C_{trddl_2}, trdtstr$,
 $C_{rst}, trddl_2, C_{trdtstr}, or_2, C_{trdtstr}, ia$,
 $C_{trdtstr}, iv, C_{trdtstr}, it$
 $C_{it[j-1]}, l_{blank_0}, C_{l_{blank_0}}, l_{blank_1}, \dots$,
 $C_{l_{blank}[j-1]}, l_{blank_j}, C_{l_{blank_j}}, it_{blank}$

$trdtstr$ is the third modality starter;
 $trddl_1, trddl_2$ are delays;
 ia, iv are i elements;
 or_1, or_2 , see 3. 3.;
 lit_j assumes the value one if the tp -
set contains a one followed by $j+1$
zeros;

$C_{it_0}, l_{blank_0}, C_{it_0}, 0_{one_0}, C_{it_0}, 0_{blank_0}$,
 $C_{l_{blank_0}}, l_{blank_1}, C_{0_{one_0}}, 0_{one_1}$,
 $C_{0_{blank_0}}, it_{blank}, C_{l_{blank_1}}, l_{blank_2}$,
 $C_{0_{one_1}, it_{one}}, C_{l_{blank_2}}, it_{one}$

$0_{blank_0}, l_{blank_j}, 0_{one_j}$ are delays;
 it_0 assumes the value one if the tp -
set contains a blank, a one, a blank,
in the order;
 $l_{blank_0}, \dots, l_{blank_j}$ are delays;
 $rstlit[j-1]cr_p$ -set controls the tp -set
resetting;

3. 6. 1. The tp -set MOVE.

$C_L, callmvr, C_{lmvr}, callmvr, C_L, lmvr_1, C_{lmvr}, lmvr$,
 $C_{lmvr_1}, lmvr, C_{lmvr_1}, it_{one}, C_{lmvr_1}, it_{zero}$

$callmvr$ is a generic component;
 $lmvr, lmvr_1$ are the l -mover
components;

$C_{lmvr}, it_{blank}, C_{lmvr_1}, it_{blank}$

$callmvr$ is a generic component;

$C_R, callrmvr, C_{rmvr}, callrmvr, C_R, rmvr_1, C_{rmvr}, rmvr$

$rmvr, rmvr_1$ are the r -mover
components;

$C_{rmvr_1}, rmvr, C_{rmvr_1}, it_{one}, C_{rmvr_1}, it_{zero}$

L, R see 3. 6.;

$C_{rmvr}, it_{blank}, C_{rmvr_1}, it_{blank}$

$it_{blank}, it_{one}, it_{zero}$ see 3. 6.;

$C_L, callLmvr, C_{Lmvr}, callLmvr, C_L, Lmvr_1$

$callLmvr, callRmvr$ are generic
components;

$C_{Lmvr_1}, Lmvr, C_{Lmvr}, it_{one}, C_{Lmvr}, it_{zero}$

$Lmvr, Lmvr_1, Lmvr_2, Lmvr_3$,

$C_{Lmvr_2}, it_{blank}, C_{Lmvr}, Lmvr, C_{Lmvr_3}, it_{blank}$

$Lmvr_4$ are the L -mover components;

F.E. Lauria: On some sufficient conditions...

$C_{Lmvr3, Lmvr2}, C_{Lmvr, Lmvr3}, C_{Lmvr1, Lmvr3},$
 $C_{R, Lmvr3}, C_{R, Lmvr4}, C_{Lmvr4, Lmvr3},$ Rmvr, Rmvr1, Rmvr2, Rmvr3,
 $C_{R, calRmvr}, C_{Rmvr, calRmvr}, C_{R, Rmvr1},$ the R-mover components;
 $C_{Rmvr1, Rmvr}, C_{Rmvr, it_{one}}, C_{Rmvr, it_{zero}},$
 $C_{Rmvr2, it_{blank}}, C_{Rmvr, Rmvr}, C_{Rmvr3, it_{blank}},$
 $C_{Rmvr3, Rmvr2}, C_{Rmvr, Rmvr3}, C_{Rmvr1, Rmvr3},$
 $C_{L, Rmvr3}, C_{L, Rmvr4}, C_{Rmvr4, Rmvr3},$

3. 6. 2. The tp-set DUPLICATE.

$C_L, lcpynr, C_{lcpynr1, lcpynr}, C_{ot_{one}, lcpynr1},$
 $C_{lcpynr2, lcpynr1}, C_{R, lcpynr2},$
 $C_{lcpynr3, lcpynr2}, C_{ot_{zero}, lcpynr3},$
 $C_{lcpynr4, lcpynr}, C_{lcpynr5, lcpynr},$
 $C_{lcpynr4, lcpynr4}, C_{lcpynr5, lcpynr5},$
 $C_{calrmvr, lcpynr3}, C_L, lcpynr6,$
 $C_{6lcpynr6, lcpynr6}, C_{lcpynr6, lcpynr4},$
 $C_{lcpynr6, it_{blank}}, C_{lcpynr7, 6lcpynr6},$
 $C_{lcpynr7, it_{one}}, C_{lcpynr8, 6lcpynr6},$
 $C_{lcpynr8, it_{zero}}, C_{lcpynr6, lcpynr},$
 $C_{lcpynr6, lcpynr1}, C_{lcpynr6, lcpynr2},$
 $C_{lcpynr6, lcpynr3}, C_{lcpynr4, lcpynr7},$
 $C_{lctp1a, lcpynr}, C_{lctp1a, lcpynr1},$
 $C_{lctp1a, lcpynr2}, C_{lctp1a, lcpynr3},$
 $C_{lctp1a, lcpynr7}, C_{lctp1a, lcpynr4},$
 $C_{lctp1b, lcpynr4}, C_{lctp3, lmvr},$
 $C_{lctp3, rmvr}, C_{lcpynr5, lctp6},$
 $C_{lctp1b, lcpynr}, C_{lctp1b, lcpynr1},$
 $C_{lctp1b, lcpynr2}, C_{lctp1b, lcpynr3},$
 $C_{lctp1b, lcpynr7}, C_{lctp2, lcpynr},$
 $C_{lctp2, lcpynr1}, C_{lctp2, lcpynr2},$
 $C_{lctp2, lcpynr3}, C_{lctp2, lcpynr7},$
 $C_{lctp3, lcpynr}, C_{lctp3, lcpynr1},$
 $C_{lctp3, lcpynr2}, C_{lctp3, lcpynr3},$
 $C_{lctp3, lcpynr7}, C_{lcpynr4, lcpynr8},$
 $C_{lcpynr5, lcpynr8}, C_{lcpynr6, lcpynr8},$
 $C_{9lcpynr9, lcpynr4}, C_{lctp1, lcpynr4},$
 $C_{lctp2, lcpynr4}, C_{lctp3, lcpynr4},$

$C_{lcpynr5, lctp6}$, $C_{lcpynr9, lcpynr8}$,
 $C_{9lcpynr9, lcpynr9}$, $C_{ot_{blank}, lcpynr8}$,
 $C_{callmvr, 9lcpynr9}$, $C_{lctp1a, lcpynr5}$,
 $C_{lctp1a, it_{blank}}$, $C_{lctp1a, lmvr}$,
 $C_{lctp1b, lcpynr5}$, $C_{lctp1b, it_{blank}}$,
 $C_{lctp1b, rmvr}$, $C_{lctp2, lcpynr5}$, $C_{lctp2, it_{one}}$,
 $C_{lctp3, lcpynr5}$, $C_{lctp3, it_{zero}}$, $C_{ot_{one}, lctp1a}$,
 $C_{calrmvr, lctp1a}$, $C_{ot_{one}, lctp1b}$,
 $C_{lctp4b, lctp1b}$, $C_L, lctp4b$, $C_{lctp5b, lctp4b}$,
 $C_{ot_{blank}, lctp5b}$, $C_{callmvr, lctp5b}$, $C_L, lctp2$,
 $C_{lctp5, lctp2}$, $C_{ot_{blank}, lctp5}$, $C_{callmvr, lctp5}$,
 $C_{lctp6, lctp5b}$, $C_{lctp6, lctp3}$.

3. 6. 4. The ERASER sets.

$C_{leraser3, leraser0}$, $C_{leraser1, leraser0}$,
 $C_{reraser3, reraser0}$, $C_{reraser1, reraser0}$,
 $C_{leraser1, leraser2}$, $C_{leraser2, leraser1}$,
 $C_{leraser3, leraser1}$, $C_{leraser4, leraser3}$,
 $C_{ot_{blank}, leraser4}$, $C_R, leraser3$,
 $C_{leraser1, it_{blank}}$, $C_{leraser2, it_{blank}}$,
 $C_{leraser3, it_{blank}}$, $C_{leraser4, it_{blank}}$,
 $C_{leraser1, it_{zero}}$, $C_{leraser2, it_{zero}}$,
 $C_{leraser3, it_{zero}}$, $C_{leraser4, it_{zero}}$,
 $C_{reraser1, reraser2}$, $C_{reraser2, reraser1}$,
 $C_{reraser3, reraser1}$, $C_{reraser4, reraser3}$,
 $C_{ot_{blank}, reraser4}$, $C_L, reraser3$,
 $C_{reraser1, it_{blank}}$, $C_{reraser2, it_{blank}}$,
 $C_{reraser3, it_{blank}}$, $C_{reraser4, it_{blank}}$,
 $C_{reraser1, it_{zero}}$, $C_{reraser2, it_{zero}}$,
 $C_{reraser3, it_{zero}}$, $C_{reraser4, it_{zero}}$.

$leraser0$, $reraser0$, is the strter of the
 $leraser$ -set, $reraser$ -set;
 $leraserj$, $reraserj$, for $j = 1, 2, 3, 4$,
 are the $leraser$ -set, $reraser$ -set,
 components;

it_{blank} , it_{one} , it_{zero} , L , R see 3. 6.;

4. The HEBB Transform.

$C_{h^*, k}$

h^* is "adaptable" if at leasat one

$c_{h^*, k}$ is Hebbian, for all k ;

C_{h, k^*}

k^* is an "originator" if at leasat one

c_{h, k^*} is Hebbian, for all h ;

5. The CAIANIELLO-HEBB Transform.

$c_{1ac1_u, ac1_u}, c_{pi_u, 1ac1_u}, c_{1ac2_u, ac2_u},$
 $c_{pi_{8+u}, 1ac2_u}, c_{1vs1_u, vs1_u}, c_{pi_{16+u}, 1vs1_u},$
 $c_{1vs2_u, vs2_u}, c_{pi_{24+u}, 1vs2_u}, c_{1nac1_u, nac1_u},$
 $c_{ni_u, 1nac1_u}, c_{1nac2_u, nac2_u}, c_{ni_{8+u}, 1nac2_u},$
 $c_{1nvs1_u, nvs1_u}, c_{ni_{16+u}, 1nvs1_u}, c_{1nvs2_u, nvs2_u},$
 $c_{ni_{24+u}, 1nvs2_u}, c_{2ac1_u, ac1_u},$
 $c_{2ac1_u, ac2_u}, c_{2vs1_u, vs1_u}, c_{2vs1_u, vs2_u},$
 $c_{2nac1_u, nac1_u}, c_{2nac1_u, nac2_u}, c_{2nvs1_u, nvs1_u},$

 $c_{2nvs1_u, nvs2_u}, c_{pi_u, 2ac1_u}, c_{pi_{8+u}, 2ac1_u},$
 $c_{pi_{16+u}, 2vs1_u}, c_{pi_{24+u}, 2vs1_u}, c_{ni_u, 2nac1_u},$

 $c_{ni_{8+u}, 2nac1_u}, c_{ni_{16+u}, 2nvs1_u}, c_{ni_{24+u}, 2nvs1_u}$

in the CH transform, for $0 < u < 8$
 $ac1_u$ is one every time a "one" has
 been coded onto the positive
 acoustic i-subset; $ac2_u$ is one every
 time a "zero" has been coded onto
 the positive acoustic i-subset;

$vs1_u$ is one every time a "one" has
 been coded onto the positive visual
 i-subset;

$vs2_u$ is one every time a "zero" has
 been coded onto the positive visual
 i-subset;

$nac1_u$ is one every time a "one" has
 been coded onto the negative
 acoustic i-subset;

$nac2_u$ is one every time a "zero" has
 been coded onto the negative
 acoustic i-subset;

$nvs1_u$ is one every time a "one" has
 been coded onto the negative visual
 i-subset;

$nvs2_u$ is one every time a "zero" has
 been coded onto the negative visual
 i-subset;

$1ac1_u, 1ac2_u, 1vs1_u, 1vs2_u, 1nac1_u,$
 $1nac2_u, 1nvs1_u, 1nvs2_u$ are delay
 components;

$2ac1_u, 2vs1_u, 2nac1_u, 2nvs1_u$ are
 inhibitory;

$pi_u, pi_{8+u}, pi_{16+u}, pi_{24+u}$ are the
 i-subset positive components;

$ni_u, ni_{8+u}, ni_{16+u}, ni_{24+u}$ are the
 i-subset negative components;

6. The ADAPTABLE Transform.

$C_{ia_{blank}, ot_{blank}}, C_{ia_{one}, ot_{blank}}, C_{ia_{zero}, ot_{blank}},$
 $C_{iv_{blank}, ot_{blank}}, C_{iv_{one}, ot_{blank}},$
 $C_{iv_{zero}, ot_{blank}}, C_{ia_{blank}, ot_{one}}, C_{ia_{one}, ot_{one}},$
 $C_{ia_{zero}, ot_{one}}, C_{iv_{blank}, ot_{one}},$
 $C_{iv_{one}, ot_{one}}, C_{iv_{zero}, ot_{one}}, C_{ia_{blank}, ot_{zero}},$
 $C_{ia_{one}, ot_{zero}}, C_{ia_{zero}, ot_{zero}}, C_{ia_{one}, ot_{zero}}, C_{ia_{zero}, ot_{zero}},$
 $C_{iv_{blank}, ot_{zero}}, C_{iv_{one}, ot_{zero}}, C_{iv_{zero}, ot_{zero}},$
 $C_{ia_{blank}, L}, C_{ia_{one}, L}, C_{ia_{zero}, L}, C_{iv_{blank}, L},$
 $C_{iv_{one}, L}, C_{iv_{zero}, L},$
 $C_{ia_{blank}, R}, C_{ia_{one}, R}, C_{ia_{zero}, R}, C_{iv_{blank}, R},$
 $C_{iv_{one}, R}, C_{iv_{zero}, R},$
 $C_{tab}, ia_{blank}, C_{tao}, ia_{one}, C_{taz}, ia_{zero},$
 $C_{tvb}, iv_{blank}, C_{tvo}, iv_{one}, C_{tvz}, iv_{zero}, C_L, tab,$
 $C_L, tao, C_L, taz, C_L, tvb, C_L, tvo, C_L, tvz, C_R, tab,$
 $C_R, tao, C_R, taz, C_R, tvb, C_R, tvo, C_R, tvz,$
 $C_L, ot_{blank}, C_L, ot_{one},$
 $C_L, ot_{zero}, C_R, ot_{blank}, C_R, ot_{one}, C_R, ot_{zero},$
 $C_{T1P}, P, C_{TP}, P, C_{TP}, TP, C_{LR}, TP, C_{LR}, T1P,$
 $C_{LR}, P, C_{O3}, it_{blank}, C_{O3}, it_{one}, C_{O3}, it_{zero}, C_{O2}, it_{zero},$
 $C_{O2}, it_{one}, C_{O7}, it_{one}, C_{O3}, P, C_{O3}, P, C_{O2}, P, C_{O2}, P,$
 $C_{O7}, P, C_{O3}, TP, C_{O3}, TP, C_{O2}, TP, C_{O2}, TP,$
 $C_{O7}, TP, C_{O3}, T1P, C_{O3}, T1P, C_{O2}, T1P, C_{O2}, T1P,$
 $C_{O7}, T1P, C_{T3P}, T3P, C_{T3P}, T2P, C_{T3P}, it_{blank},$
 $C_{T2P}, TP, C_{T4P}, T3P, C_{T3P}, T4P, C_{T4P}, it_{blank},$
 $C_{RL}, T3P, C_{RL}, T4P, C_{T4P}, T5P, C_{T3P}, T5P,$
 $C_{T5P}, it_{blank}, C_L, T6P, C_R, T6P, C_{T6P}, T2P,$
 $C_{T6P}, it_{blank}, C_{T3P}, T6P.$

$ia_{blank}, ia_{one}, ia_{zero}, ia_1, ia_2, \dots, ia_7$
 are the i-subset acoustic
 components;

$iv_{blank}, iv_{one}, iv_{zero}, iv_1, iv_2, \dots, iv_7$
 are the i-subset visual components;
 $L, R, ot_{blank}, ot_{one}, ot_{zero}$ see 3.6;

$O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7$ are the
 o-subset only components;

P is the primitive component to read
 the tp-set into the o-subset;

$T6P, T5P, T4P, T3P, T2P, T1P, TP,$
 $tab, tao, taz, tvb, tvo, tvz$ are
 temporary components;

Acknowledgments: this research was supported in part through the MPI-INFM
 40% fund and a CNR grant on the "Progetto Strategico Reti Neurali".

8. REFERENCES.

- [1] Caianiello, E. R. - "Outline of a theory of thought processes and thinking machines" J. Theor. Biol. 2 (1961) 204-235.
- [2] Hebb, D. O. - "The organization of behavior" J.Wiley & Sons (New York), (1966).

[3] Lauria, F. E. - "On the Hebb rule implementation in a Boolean neural network" Myung-Won Kim & Soo-Young Lee eds. Proc. Int. Conf. on Neural Inf. Proc. ICONIP' 94-Seoul Vol. 2 (1994) 857-864 [invited speech].

[4] Lauria, F. E., M. Sette, S. Visco - "Adaptable Boolean neural networks" (1995) 166 (submitted for publication).

[5] McCulloch, W. S. and W. Pitts - "A logical calculus of the ideas immanent in the nervous activity" Bull. Math. Bioph. 5 (1943) 115-143.

[6] Rosza Peter- "Recursive functions" Academic Press, NY (USA) (1967) 300.

* Università degli Studi di Napoli "Federico II", Dipartimento di Scienze Fisiche
Mostra d' OLTremare, pad. 19; I-80125 Naples, Italy (EU)
lauria@na.infn.it

“Quantum Geometry” e accelerazione massima ¹

Nota di Antonio Feoli^{2 3}

Presentata dal Socio Prof. G. Scarpetta
(Adunanza del 4 marzo, 1995)

Abstract - Caianiello's theory called “Quantum Geometry” is an attempt to describe Quantum Mechanics by means of the mathematical apparatus of General Relativity with the aim to unify the two major theories of modern physics. Starting from a new line element on phase space, as an unexpected result, the existence of a maximal acceleration for massive particle appears and leads to modifications in the effective spacetime geometry experienced by an accelerated particle. We discuss the consequences of this model in the cases of uniformly accelerated and uniformly rotating particles.

Riassunto - La teoria di Caianiello denominata “Quantum Geometry” è un tentativo di descrivere la Meccanica Quantistica con il formalismo matematico caratteristico della Relatività Generale, con l'obiettivo di unificare le due grandi teorie della Fisica moderna. Partendo da un nuovo intervallo invariante definito sullo spazio delle fasi, come risultato inaspettato, si ottiene l'esistenza di un'accelerazione massima per le particelle massive, che implica una revisione della dinamica e porta modifiche nella geometria spazio-temporale effettivamente sperimentata da una particella in moto accelerato. Discutiamo le conseguenze delle correzioni alle metriche classiche nel caso di particelle in moto uniformemente accelerato e in moto rotatorio uniforme.

1 INTRODUZIONE.

Nel 1980 E.R. Caianiello [1, 2, 3] diede inizio ad un programma di ricerca, col tentativo di ottenere, a partire dai fondamenti della Teoria dei Sistemi, ed in particolare dalla Differential Estimation Theory, una omogenea visione geometrica della realtà fisica, sia classica che quantistica, cercando essenzialmente di estendere alla Meccanica Quantistica l'idea che aveva guidato Einstein nell'interpretare la Gravitazione come Geometria dello Spazio-Tempo. Nei lavori suoi e del suo gruppo [4 - 16] tale unificazione geometrica fu

¹Ricerca effettuata con fondi del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e dell'Istituto Internazionale per gli Alti Studi Scientifici “E.R.Caianiello”

²Vincitore del premio dell'Accademia delle Scienze Fisiche 1993 per il settore “Fisica Teorica”.

³Dipartimento di Fisica Teorica e S.M.S.A., Università di Salerno, via S. Allende, 84081 Baronissi (Salerno)

Istituto Internazionale per gli Alti Studi Scientifici “E.R.Caianiello”, via G.Pellegrino n.19, 84019 Vietri sul Mare, (Salerno)

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli, Mostra d'Oltremare pad. 19, 80125 Napoli.

ottenuta rappresentando gli operatori standard dell'algebra di Heisenberg come derivate covarianti su di un manifold otto-dimensionale, identificato con lo spazio delle fasi.

Nella Meccanica Quantistica standard gli operatori posizione e momento appaiono come

$$Q_r = q_r \quad P_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^r} + F_r(q)$$

nella rappresentazione di Schrödinger e come

$$Q_r = i\hbar \frac{\partial}{\partial p^r} - F_r(p) \quad P_r = p_r$$

nella rappresentazione degli impulsi (con la funzione F che può essere eliminata con un'opportuna trasformazione di gauge).

Caianiello rappresenta invece i due operatori in maniera simmetrica:

$$P_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^r} + F_r$$

$$Q_r = i\hbar \frac{\partial}{\partial p^r} - F_r$$

e, introducendo una connessione antihermitiana $\Gamma_r = \frac{i}{\hbar} F_r$, può esprimere gli operatori come derivate covarianti nello spazio delle fasi ad otto dimensioni

$$P_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial q^r} + \Gamma_r \right) = -i\hbar D_r$$

$$Q_r = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p^r} + \Gamma_{\bar{r}} \right) = i\hbar D_{\bar{r}}$$

(convenzioni: $r = 0, \dots, 3$ $\bar{r} = 4, \dots, 7$ $\mu, \nu = 0, \dots, 7$)

Le condizioni quantiche:

$$[Q_r, Q_s] = 0; \quad [P_r, P_s] = 0; \quad [Q_r, P_s] = i\hbar \eta_{rs}$$

dove $\eta_{rs} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$, diventano relazioni di commutazione tra derivate covarianti

$$[D_{\bar{r}}, D_{\bar{s}}] = 0; \quad [D_r, D_s] = 0; \quad [D_{r+4}, D_s] = \frac{i}{\hbar} \eta_{rs} \quad (1.1)$$

che possiamo riscrivere in forma compatta nello spazio delle fasi

$$[D_u, D_v] = \frac{i}{\hbar} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & 0 & & & & -1 \\ \hline & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \end{array} \right).$$

Esse determinano le componenti del tensore di Riemann; infatti è noto dalla geometria differenziale che

$$[D_\mu, D_\nu] \phi^\lambda = R^\lambda_{\rho\mu\nu} \phi^\rho.$$

La quantizzazione è quindi interpretata geometricamente come curvatura dello spazio delle fasi.

In particolare, imponendo che le connessioni diano luogo ad un tensore di Riemann che soddisfi le (1.1), e che nel limite classico $\hbar = 0$ gli operatori momento P_r e posizione Q_r si riducano ai corrispondenti classici p_r e q_r , Caianiello deriva [2,3] come connessioni quantistiche per una particella libera le seguenti matrici:

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = \begin{pmatrix} \Gamma_{\beta r}^\alpha \\ \Gamma_{\beta \bar{r}}^\alpha \end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} F_{\beta r}^\alpha \\ F_{\beta(r+4)}^\alpha \end{pmatrix}$$

con

$$F_{\beta r}^\alpha = p_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$F_{\beta(r+4)}^\alpha = q_r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con queste connessioni, la soluzione più generale dell'equazione di compatibilità metrica è un tensore metrico complesso nello spazio delle fasi della forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta & \eta A e^{-\frac{i}{\hbar} p_r q_r} \\ \eta A^* e^{\frac{i}{\hbar} p_r q_r} & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & \eta \Psi \\ \eta \Psi^* & \eta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Alla luce di questo risultato possiamo interpretare in un modo nuovo il dualismo onda - particella affermando che ad ogni particella libera è associata un'onda piana Ψ di de Broglie che soddisfa l'equazione classica di Klein - Gordon e che genera la curvatura dello spazio delle fasi in modo analogo a quello di un'onda gravitazionale nello spazio qudridimensionale. Ciò si può facilmente comprendere dal fatto che tale onda di de Broglie appare come una perturbazione alla metrica Minkowskiana otto-dimensionale.

Tra le molte conseguenze interessanti legate a questo nuovo schema, ci occuperemo del risultato nuovo ed inaspettato secondo cui esiste un limite naturale per l'accelerazione propria delle particelle massive in moto arbitrario; tale risultato apre nuove prospettive circa l'interpretazione dei fenomeni fisici e determina una radicale revisione dei concetti di spazio e di tempo.

Caianiello infatti propone come arena naturale, per lo studio delle correzioni quantistiche al background classico della relatività generale, lo spazio delle fasi. Ciò comporta che l'elemento di linea

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.3)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1 - 1 - 1) \quad x^\mu = (ct, \vec{x})$$

che implica un limite massimo per le velocità

$$0 \leq \frac{ds^2}{dt^2} = c^2 - \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 = c^2 - v^2 \implies v \leq c \quad (1.4)$$

va sostituito (se ci limitiamo a considerare varietà reali ponendo la costante complessa $A = 0$ nella (1.2)), con l'elemento di linea dello spazio delle fasi ottodimensionale

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 + \frac{\hbar^2}{c^2 m_0^4} \left[\frac{dE^2}{c^2} - |d\vec{p}|^2 \right] \quad (1.5)$$

Questo nuovo invariante può essere riscritto in funzione delle usuali coordinate dello spazio-tempo più le componenti della quadrivelocità definendo una metrica su quello che, con una moderna terminologia di geometria differenziale, viene chiamato "spacetime tangent bundle" $TM \equiv M_8$.

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 + \frac{\hbar^2}{c^2 m_0^2} [(du^0)^2 - |d\vec{u}|^2] \quad (1.6)$$

che si riduce alla (1.3) nel caso in cui $\hbar \rightarrow 0$ ($u^\mu = dx^\mu/ds$ rappresenta la quadrivelocità della particella). Nel seguito useremo per gli indici la seguente notazione: lettere greche che variano da 0 a 3, per riferirsi alle coordinate spazio-temporali; lettere latine maiuscole che variano da 0 a 7, per riferirsi alle coordinate dell'intero fibrato tangente TM .

Possiamo riscrivere la (1.6) nella forma più generale

$$d\tau^2 = g_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} (dx^\mu dx^\nu + \frac{\hbar^2}{c^2 m_0^2} d\dot{x}^\mu d\dot{x}^\nu) \quad (1.7)$$

Prima di tutto osserviamo che, in accordo con l'invariante generalizzato $d\tau$ definito dall'elemento di linea otto-dimensionale (1.7), gli intervalli spazio-temporali $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ non sono più invarianti ma dipendono dalla traiettoria nello spazio dei momenti, cioè dalla scelta di $\dot{x}^\mu(s)$ (proprio come in relatività ristretta gli intervalli di tempo dt perdono il loro significato assoluto e diventano dipendenti dalla curva $x^i(t)$ che descrive il moto nello spazio tridimensionale). Per ogni data traiettoria $\dot{x}^\mu(s)$ abbiamo infatti $d\dot{x}^\mu = \ddot{x}^\mu ds$ ed otteniamo dalla (1.7)

$$d\tau^2 = ds^2 \left(1 - \frac{c^4 |\ddot{x}|^2}{\mathcal{A}^2} \right) \quad (1.8)$$

dove $|\ddot{x}|^2 = |g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu \ddot{x}^\nu|$ è il modulo quadro del quadrivettore accelerazione relativistico (spacelike). Come nella (1.4) $0 \leq d\tau^2$ implica

$$|a| = c^2 |\ddot{x}| \leq \frac{m_0 c^3}{\hbar} = \mathcal{A} \quad (1.9)$$

cioè l'esistenza di un'accelerazione massima.

Seguendo questa linea di pensiero sono stati pubblicati negli ultimi anni molti articoli che, partendo da differenti motivazioni e da differenti schemi teorici, giungono all'esistenza di un limite massimo sulle accelerazioni [17 - 30]. In alcuni di questi lavori l'accelerazione propria massima è fissata dalla massa di Planck

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

in altri il valore dell'accelerazione massima, nel riferimento proprio della particella, è fissato dalla massa a riposo m_0 della particella stessa.

La scelta fra una massima accelerazione "mass dependent" e una massima accelerazione come costante universale fissata dalla massa di Planck potrà essere operata in modo adeguato solo attraverso esperimenti. Se l'accelerazione massima è una costante universale essa assume un valore eccezionalmente elevato: $A_{max} \simeq 5 \times 10^{53} \text{ cm/s}^2$; ed è pertanto molto difficile trovare sperimentalmente effetti fisici riconducibili all'esistenza di questo limite superiore sulle accelerazioni.

Poichè $d\tau$ è ora l'intervallo invariante, moti con differenti accelerazioni corrispondono chiaramente a differenti valori di ds . Questo realizza già ad un livello semiclassico la tesi sostenuta anni fa da Gibbons e Hawking che *in quantum gravity la metrica spazio-temporale debba essere osservatore-dipendente* [31]. Lungo un percorso classico, definito da $x^\mu(s)$ e $\dot{x}^\mu(s)$, abbiamo perciò una definizione generalizzata del tempo proprio invariante e cioè

$$d\tau = dt(1 - |\mathbf{v}|^2)^{1/2} \left(1 - \frac{|\mathbf{a}|^2}{A^2} \right)^{1/2} \quad (1.11)$$

dove $v^i = dx^i/dt$.

Questo argomento può essere applicato ad un osservatore classico, il cui moto è rappresentato da una traiettoria ben definita; per una particella quantistica, tuttavia, la nozione di traiettoria è priva di significato, siccome posizione e momento non possono essere simultaneamente definiti con precisione arbitrariamente alta. Il moto di una particella quantistica, perciò, non può essere rappresentato da una linea di mondo unidimensionale $x^\mu(s)$: bisogna, invece, considerare tutta la porzione (*world-tube*) dello spazio-tempo su cui la probabilità di trovare la particella è non nulla.

Di conseguenza dobbiamo specificare una distribuzione di velocità non lungo una traiettoria unidimensionale $\dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu(s)$, ma sulla corrispondente regione estesa, che in generale si allarga fino a coprire l'intero spazio-tempo: in questo caso un campo di velocità $\dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu(\xi^\nu)$ caratterizza il moto della particella.

Per indagare le conseguenze fisiche dell'introduzione dell'invariante 8-dimensionale (1.7), che tiene conto dell'esistenza di un'accelerazione massima, si può procedere a costruire la dinamica seguendo due strade diverse:

- definendo un'opportuna azione nello spacetime tangent bundle e derivando le equazioni del moto 8-dimensionali
- definendo una procedura d'immersione che permetta di ritornare alle usuali quattro dimensioni ma con una geometria efficace diversa da quella classica, modificata dal vincolo di un limite superiore sull'accelerazione.

La metrica 8-dimensionale è il punto di partenza per una teoria generalizzata della Relatività, per lo studio della geometria differenziale dello spazio delle fasi [21, 32 - 38] e per la formulazione di una possibile azione invariante in otto dimensioni che dipende dalla curvatura scalare R e dal determinante G del tensore metrico 8-dimensionale

$$I = \int d^8x \sqrt{G} R \quad (1.12)$$

che porterà ad equazioni di campo ed equazioni del moto generalizzate.

Questo tipo di approccio é però notevolmente complesso, per cui la risoluzione delle equazioni di campo non è impresa facile neppure nei casi in linea di principio più semplici.

Si è dunque ritenuto opportuno proporre una procedura d'immersione [39, 40] che possa permettere di ricondurre l'analisi delle equazioni di campo nell'ordinario spazio-tempo quadridimensionale, ma con un tensore metrico effettivo modificato.

2 LA PROCEDURA D'IMMERSIONE

Si può evitare il problema di dover risolvere equazioni di campo otto-dimensionali, se si considera che le coordinate dello space-time tangent bundle M_8 non sono tra loro indipendenti, quando riferite al moto effettivo di particelle; infatti in tal caso le quadrivelocità $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \dot{x}^\mu$ saranno funzioni delle prime quattro coordinate spazio-temporali x^μ . Si può dunque considerare lo spazio-tempo V_4 , come un'ipersuperficie a quattro dimensioni localmente immersa in M_8 . Per ottenere una metrica a quattro dimensioni definita su V_4 , indotta dall'elemento di linea invariante nello space-time tangent bundle M_8

$$dr^2 = g_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} (dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{m^2} d\dot{x}^\mu d\dot{x}^\nu) \quad (2.1)$$

(qui e nel seguito utilizziamo unità naturali con $\hbar = c = 1$ cosicchè $A_{max} = m$) dobbiamo assegnare le equazioni parametriche che regolano la sua immersione, *che rappresentano cioè V_4 come un submanifold di M_8* , cioè le $x^A = x^A(\xi^\mu)$, dove x^A sono coordinate su M_8 e ξ^μ su V_4 . Le quattro equazioni $\dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu(\xi^\nu)$, insieme con quelle $x^\mu = x^\mu(\xi^\nu)$ che legano le coordinate x^A di M_8 alle ξ^μ scelte per parametrizzare V_4 costituiscono l'insieme delle 8 equazioni parametriche $x^A = x^A(\xi^\mu)$ necessarie a rappresentare V_4 come un'ipersuperficie in M_8 . Dato un qualsiasi campo di velocità $\dot{x}^\mu(\xi^\nu)$ corrispondente a qualche particolare situazione dinamica, l'immersione di V_4 nello spazio delle fasi è così determinata.

Una volta che le equazioni parametriche sono specificate, abbiamo

$$dx^A = \frac{\partial x^A(\xi)}{\partial \xi^\nu} d\xi^\nu \quad (2.2)$$

e la metrica dello spazio-tempo $\tilde{g}_{\mu\nu}(\xi)$ localmente indotta su V_4 dall' elemento di linea (1.1) di M_8 , cioè tale che

$$d\tilde{s}^2 = g_{AB} dx^A dx^B = \tilde{g}_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (2.3)$$

è allora data da

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \xi^\nu} \right) \quad (2.4)$$

Perfino cominciando da uno spazio delle fasi M_8 con una metrica piatta, nel caso di particelle interagenti, caratterizzate da un campo di velocità \dot{x}^μ non banalmente costante ($\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \xi^\nu} \neq 0$), abbiamo allora una geometria quadri-dimensionale efficace che, in generale, è curva.

Dal punto di vista geometrico-differenziale ci muoviamo in un "fibre bundle" in cui il manifold di base è lo spazio-tempo e la "fibre" è lo spazio delle quadri-velocità. In particolare il nostro "fibre bundle" è il tangent bundle TM associato in modo naturale attraverso la proiezione $\pi : TM \rightarrow M$ al manifold M dello spazio-tempo, di qui il nome *spacetime tangent bundle*.

Abbiamo definito su TM una metrica $G_{AB} = g_{\mu\nu} \otimes g_{\mu\nu}$ come prodotto tensoriale della metrica $g_{\mu\nu}$ su M . La nostra procedura di immersione di M come ipersuperficie in TM equivale a considerare una sezione di TM cioè una mappa $\sigma : M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ \sigma = id_M$. Indicata con $\sigma(M)$ l'ipersuperficie immersa in TM tramite σ , possiamo restringere G_{AB} a $\sigma(M)$ ed ottenere una metrica indotta $\tilde{g} = G/\sigma(M)$ che può essere pensata come una metrica su una varietà $\sigma(M)$ localmente isomorfa allo spazio-tempo M .

La curvatura efficace dello spazio-tempo, a livello microscopico, e nel regime quantistico non è assoluta, ma dipendente dalla particella: particelle con differenti interazioni sono in generale caratterizzate da campi di velocità $\dot{x}^\mu(\xi^\nu)$ differenti, cosicchè la geometria quadri-dimensionale intrinseca che esse sperimentano è descritta da differenti tensori metrici.

Inoltre se l'accelerazione massima dipende dalla massa a riposo della particella la curvatura indotta dipenderà dalla massa della particella test: poichè le coordinate x^A di M_g sono "mass-dependent" segue che particelle con masse differenti sono soggette a metriche diverse e quindi a forze gravitazionali efficaci diverse, anche se la loro cinematica è caratterizzata dallo stesso campo di velocità. Ciò corrisponde ad una violazione "mass-dependent" del principio d'equivalenza e suggerisce la possibilità di utilizzare i risultati sperimentali circa la validità del principio di equivalenza come verifica sperimentale del modello adottato per tener conto di un limite superiore sull'accelerazione [41].

3 ESEMPI: SPAZIO DI RINDLER E MOTO ROTATORIO

Cominciamo ad applicare la procedura di immersione esposta nella sezione precedente ai casi piú semplici. Un campo di velocità costante $d\dot{x}^\mu = 0$ ovviamente dà un' immersione banale; quindi per ottenere delle correzioni quantistiche alla curvatura, dobbiamo considerare campi con accelerazione non nulla. L' esempio piú semplice da studiare è il moto con accelerazione propria costante (che chiamiamo g) in uno spazio piatto.

Consideriamo una particella, che si muove nello spazio di Minkowski, e su cui agisce una forza esterna costante.

Nel suo moto la particella soddisferà le equazioni:

$$\begin{cases} u^\mu u_\mu = -1 & \text{dove } u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \\ a^\mu u_\mu = 0 \\ a^\mu a_\mu = g^2 & a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} \end{cases}$$

Lavoriamo per semplicità in uno spazio-tempo bidimensionale cosicchè lo spacetime-tangent bundle sarà solo quadri-dimensionale ed avremo:

$$\begin{cases} (u^1)^2 - (u^0)^2 = -1 \\ u^1 a_1 - u^0 a_0 = 0 \\ (a^1)^2 - (a^0)^2 = g^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du^1}{ds} = g u^0 \\ \frac{du^0}{ds} = g u^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} = g^2 u^1 \\ \frac{d^2 u^0}{ds^2} = g^2 u^0 \end{cases}$$

Queste equazioni differenziali possono essere risolte con facilità

$$\begin{cases} u^0 = F \cosh(gs) + G \sinh(gs) \\ u^1 = H \cosh(gs) + I \sinh(gs) \end{cases}$$

Con un' opportuna scelta delle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} u^\mu(0) \equiv (1, 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F = u^0(0) = 1 & \text{e} & G = \frac{1}{g} a^0(0) = 0 \\ H = u^1(0) = 0 & \text{e} & I = \frac{1}{g} a^1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ a^\mu(0) \equiv (0, g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^0 = \cosh gs \\ u^1 = \sinh gs \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{g} \sinh gs \\ x = \frac{1}{g} \cosh gs \end{cases} \quad (3.1)$$

Notiamo che

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{g^2} (\cosh^2 gs - \sinh^2 gs) = \frac{1}{g^2} \quad (3.2)$$

rappresenta un' iperbole nel diagramma spazio-tempo di Minkowski. Ora introduciamo le coordinate di Rindler [42]

$$\xi = \frac{1}{g}, \quad \eta = gs \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \xi \cosh \eta \\ t = \xi \sinh \eta \end{cases} \Rightarrow x^2 - t^2 = \xi^2 \quad (3.4)$$

In questo modo ogni punto dello spazio di Minkowski potrà essere individuato dalle coordinate ξ ed η che rappresentano l' intersezione fra l'iperbole $x^2 - t^2 = \xi^2$ e la retta $\eta = gs$ passanti per quel punto.

Lo spazio di Rindler è quindi rappresentato dalla porzione dello spazio-tempo di Minkowski descritta dalle traiettorie di particelle uniformemente accelerate, ottenute variando g ed s secondo la parametrizzazione (3.3)

Dalla (3.4), l'elemento di linea di Minkowski $ds^2 = dx^2 - dt^2$ si trasforma in

$$ds^2 = -\xi^2 d\eta^2 + d\xi^2 \quad (3.5)$$

Lo spazio descritto dalla metrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-\xi^2, 1)$ ha un orizzonte per $\xi = 0$. L' orizzonte dello spazio di Rindler è rappresentato nel piano (x, t) dal cono luce

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^2 - t^2 = 0 \quad (3.6)$$

ovvero dal moto iperbolico limite (i rami delle iperboli degenerano nelle rette bisettrici dei quattro quadranti) che corrisponde ad un' accelerazione propria g infinita. L'elemento di linea (3.5) non è in accordo perciò con l'esistenza di un limite massimo per l'accelerazione propria $g \leq m$.

Nell'ipotesi che questo limite esista, dovremo modificare la geometria dello spazio di Rindler, in modo che l'orizzonte di tale spazio si ottenga in corrispondenza della linea di

universo di un osservatore dotato di accelerazione propria massima, $x^2 - t^2 = \frac{1}{m^2}$, anziché infinita.

A questo scopo utilizziamo la procedura di immersione esposta nella sezione precedente. Il primo passo consiste nell'assegnare le equazioni parametriche che legano le coordinate (t, x, u^0, u^1) di M_4 a quelle (ξ, η) che parametrizzano V_2 . Dalle (3.1) e (3.3) otteniamo:

$$x^\mu(\xi, \eta) = (\xi \cosh \eta, \xi \sinh \eta) \quad \dot{x}^\mu(\xi, \eta) = (\sinh \eta, \cosh \eta) \quad (3.7)$$

Cosicché l'elemento di linea (3.5) viene generalizzato in

$$dr^2 = - \left(\xi^2 - \frac{1}{m^2} \right) d\eta^2 + d\xi^2 \quad (3.8)$$

Va sottolineato che, sebbene in apparenza molto semplice, questa correzione quantistica alla consueta metrica di Rindler porta ad interessanti conseguenze fisiche. Prima di tutto l'orizzonte di questo manifold è dato ora da $\xi = \frac{1}{m}$ invece di $\xi = 0$ ed è quindi rappresentato nel piano (x, t) dall'iperbole di massima accelerazione $x^2 - t^2 = m^{-2}$ corrispondente alla linea di mondo di una particella uniformemente accelerata con accelerazione propria costante $g = m$ come desideravamo.

Un'altra importante differenza dallo spazio di Rindler classico è che la metrica (3.8) descrive un manifold curvo con curvatura scalare

$$R = \frac{2}{m^2(\xi^2 - m^{-2})^2} \quad (3.9)$$

che diverge per $\xi = m^{-1}$ cosicché l'orizzonte è una vera singolarità fisica e non una singolarità dovuta ad una patologia del particolare sistema di coordinate. Si dimostra inoltre che la (3.8) è soluzione delle equazioni di campo di Einstein nello spazio curvo di Rindler in assenza di materia.

La propagazione di campi bosonici nella metrica di Rindler è stata studiata a più riprese [43 - 49] nell'ambito del teorema della termalizzazione secondo il quale lo stato di vuoto per un osservatore inerziale diventa per un osservatore uniformemente accelerato un ensemble canonico, cui è associata una temperatura che è proporzionale all'accelerazione dell'osservatore.

A questo proposito Takagi [47] ha risolto l'equazione di Klein-Gordon per una particella scalare di massa m minimamente accoppiata alla gravità. Seguendo l'approccio standard alla teoria dei campi negli spazi curvi, la densità di Lagrangiana per un campo scalare complesso sarà:

$$L = \sqrt{-g}(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (3.10)$$

da cui l'equazione di Klein-Gordon assumerà la forma

$$(\square - m^2)\phi = 0 \quad (3.11)$$

con

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu) \quad (3.12)$$

Nello spazio di Rindler l'equazione di Klein-Gordon diventa:

$$\left\{ -\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - m^2 \right\} \phi = 0 \quad (3.13)$$

Se si cercano soluzioni a frequenza positiva rispetto al tempo di Rindler $\phi = \psi(\xi)e^{-i\omega\eta}$ si ha:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + \frac{\omega^2}{\xi^2} - m^2 \right\} \psi(\xi) = 0 \quad (3.14)$$

L'equazione (3.14) può essere risolta in termini delle funzioni di Bessel. Però per capire meglio il significato fisico delle soluzioni, introduciamo la coordinata

$$\rho = \log \frac{|\xi|}{\alpha} \quad (3.15)$$

con $\alpha > 0$ e avente le dimensioni di una lunghezza. Nella variabile ρ l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = -\alpha^2 e^{2\rho} (d\eta^2 - d\rho^2) \quad (3.16)$$

e l'equazione di Klein-Gordon assume la forma

$$\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \alpha^2 m^2 e^{2\rho} \right) \psi(\rho) = \omega^2 \psi(\rho) \quad (3.17)$$

che è del tipo equazione di Schrödinger con un potenziale efficace dato da

$$V_{eff}(\rho) = \alpha^2 m^2 e^{2\rho} \quad (3.18)$$

Al variare di ξ tra 0 e ∞ , ρ varia tra $-\infty$ e $+\infty$, per cui

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} V_{eff}(\rho) = 0 \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty \quad (3.19)$$

Quindi i possibili autovalori ω sono tutti positivi e lo spettro è continuo.

Esaminiamo ora il comportamento della particella immersa nel manifold generalizzato descritto dalla metrica (3.8) [39, 40]. Operiamo anche qui un cambiamento di coordinate in modo da ridurre l'equazione di Klein Gordon in una forma Schrödinger-like:

$$m\xi = \cosh\rho \quad (\rho \geq 0); \quad m\xi = -\cosh\rho \quad (\rho \leq 0) \quad (3.20)$$

nella nuova coordinata ρ che varia da $-\infty$ a $+\infty$ la metrica (3.8) può essere scritta in forma conformemente piatta:

$$dr^2 = \frac{1}{m^2} \sinh^2\rho (d\eta^2 - d\rho^2) \quad (3.21)$$

L'equazione di Klein-Gordon in questa metrica è:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sinh^2\rho \right) \phi(\eta, \rho) = 0 \quad (3.22)$$

e, cercando soluzioni della forma

$$\phi = \psi(\rho)e^{-i\omega\eta} \quad (3.23)$$

avremo l'equazione Schrödinger-like:

$$\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \sinh^2\rho\right)\psi(\rho) = \omega^2\psi(\rho) \quad (3.24)$$

La (3.24) è un caso particolare (per $q = 1/4$ e $E = -(\omega^2 + 1/2)$) dell'equazione differenziale modificata di Mathieu

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - (E + 2q \cosh(2\rho))\right)\psi(\rho) = 0 \quad (3.25)$$

Questa equazione è risolvibile esattamente grazie alle funzioni di Mathieu [50] ed è stata studiata in contesto diverso da numerosi autori (vedi per esempio [51 – 53]) che hanno adoperato metodi numerici come il Runge Kutta o approcci perturbativi. Ciò che più interessa nel caso fisico che stiamo esaminando è però il comportamento del potenziale efficace $V_{eff} = \sinh^2\rho$ che tende ad infinito nel limite $\rho = \pm\infty$. Siamo in presenza cioè di un'equazione di tipo Schrödinger per una buca di potenziale e abbiamo quindi uno spettro discreto dell'energia a differenza di quanto accadeva per lo spazio di Rindler classico.

Per evidenziare le differenze dal caso continuo, possiamo considerare il regime di grandi accelerazioni $g \rightarrow m$ che significa $\rho \ll 1$ (dalla (3.20)). Sviluppando il potenziale efficace nell'intorno dell'origine si ottiene che, al primo ordine in ρ^2 , l'equazione (3.24) assume la stessa forma dell'equazione di un oscillatore armonico

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \rho^2\right]\psi(\rho) = \omega^2\psi(\rho) \quad (3.26)$$

Perciò in questa approssimazione i valori permessi di ω sono $\omega_n^2 = 2n+1$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ e lo spettro energetico per un osservatore locale con accelerazione propria g cioè $E_n = \omega_n/\sqrt{g_{00}}$ è allora dato nel limite $g \rightarrow m$ da:

$$E_n = g\sqrt{\frac{2n+1}{1-g^2m^{-2}}} \quad (3.27)$$

Particelle accelerate sono caratterizzate quindi da uno spettro d'energia discreto nell'approssimazione di alte accelerazioni ($g \rightarrow m$), i livelli corrispondenti al quadrato dell'energia propria sono equispaziati, cioè $E_n^2 \propto n$. Questo comportamento è simile allo spettro di massa nei dual resonance models e in teoria delle stringhe [54] e agli spettri trovati per le particelle estese da Caianiello et al. nelle soluzioni delle equazioni otto dimensionali di Dirac e di Klein-Gordon nello spazio delle fasi [4, 6, 14, 15]. Un ulteriore motivo di connessione con la teoria delle stringhe è costituito dal lavoro di De Vega e Sanchez [55], che per quantizzare in modo adeguato una stringa accelerata, furono costretti ad introdurre un parametro infinitesimo ϵ , dell'ordine della lunghezza di Planck, per regolarizzare l'orizzonte di Rindler (con uno shift da $\xi = 0$ all'iperbole $\xi_{min} \simeq \epsilon$), evitando

così l'insorgere di divergenze ultraviolette nell'energia libera e nell'entropia dei campi quantistici.

Secondo De Vega e Sanchez, l'introduzione ad hoc di questo parametro di regolarizzazione "riflette il fatto che una descrizione classica della geometria non è più valida a distanze dell'ordine della lunghezza di Planck". Nel nostro approccio, se fissiamo m uguale alla massa di Planck m_p , ritroviamo in modo automatico e naturale, la regolarizzazione richiesta da De Vega e Sanchez senza introduzione di nuovi parametri.

L'accelerazione massima gioca quindi il ruolo di un cut-off fisico che previene l'insorgere di divergenze in teoria dei campi.

L'osservazione sperimentale della quantizzazione dell'energia per particelle accelerate fornirebbe un argomento decisivo per la conferma dell'accelerazione propria massima come legge fondamentale della natura. È stato mostrato però che è difficile osservare direttamente su una scala di distanza macroscopica la quantizzazione dell'energia per particelle accelerate da forze a lungo range come quelle elettromagnetiche [40, 41];, il regime di grandi accelerazioni potrebbe essere ottenuto però con le interazioni forti. In laboratorio, valori più alti dell'accelerazione possono essere raggiunti nel caso di moto circolare. Le correzioni alla metrica di una particella in moto rotatorio uniforme possono essere dedotte con la stessa procedura usata per il caso di Rindler.

Consideriamo una particella in moto circolare uniforme con una velocità angolare costante ω intorno all'asse z . Siano (t, x, y) e (t', x', y') le coordinate del sistema inerziale e di quello rotante rispettivamente (lavoriamo per semplicità con uno spazio-tempo tridimensionale ponendo $z = 0$). Esse sono legate dalla trasformazione:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y &= x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \end{aligned} \quad (3.31)$$

Possiamo scrivere l'elemento di linea di Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 \quad (3.32)$$

in funzione delle coordinate rotanti (t', x', y') :

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r'^2) dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 + 2\omega(y' dx' - x' dy') dt' \quad (3.33)$$

dove

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

Usando coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \phi' \\ y' &= r' \sin \phi' \end{aligned} \quad (3.34)$$

l'elemento di linea per un sistema rotante diviene:

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r'^2) dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\phi'^2 - 2\omega r'^2 d\phi' dt' \quad (3.35)$$

Cosicchè una particella che si muove lungo una circonferenza di raggio $r' = R = \text{cost.}$ con velocità angolare costante ω ha un tempo proprio:

$$ds^2 = dt'^2(1 - \omega^2 R^2) \quad (3.36)$$

e la sua linea di mondo $x^\mu(s)$ ha equazioni parametriche in funzione del tempo proprio s :

$$\begin{aligned} t &= \gamma s \\ x &= R \cos(\omega \gamma s + \phi_0) \\ y &= R \sin(\omega \gamma s + \phi_0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

dove $\gamma = (1 - \omega^2 R^2)^{-1/2}$. Da cui otteniamo la quadri-velocità

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \gamma \\ \dot{x} &= -\gamma \omega R \sin(\omega \gamma s + \phi_0) \\ \dot{y} &= \gamma \omega R \cos(\omega \gamma s + \phi_0) \end{aligned} \quad (3.38)$$

e la quadri-accellerazione

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= 0 \\ \ddot{x} &= -\gamma^2 \omega^2 R \cos(\omega \gamma s + \phi_0) \\ \ddot{y} &= -\gamma^2 \omega^2 R \sin(\omega \gamma s + \phi_0) \end{aligned} \quad (3.39)$$

cosicchè:

$$|\ddot{x}^\mu \ddot{x}_\mu| = \gamma^4 \omega^4 R^2 \quad (3.40)$$

Val la pena di sottolineare che quando le traiettorie rotanti variano secondo la parametrizzazione

$$\begin{aligned} t' &= \gamma s \\ r' &= R \\ \phi' &= \phi_0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

le equazioni (3.37) coincidono con le (3.31) che trasformano l'elemento di linea di Minkowski (3.32) nella forma (3.35), ottenuta in funzione delle coordinate rotanti cilindriche (t', r', ϕ') .

Sappiamo che $r = r'$ e $t = t'$ cosicchè, sostituendo la (3.41) nella (3.37) e nella (3.38), possiamo scrivere in forma compatta le equazioni parametriche $x^\mu(\xi^\nu)$ e $\dot{x}^\mu(\xi^\nu)$ che definiscono l'immersione nello spacetime tangent bundle di una particella rotante:

$$x^\mu(\xi^\nu) = (t, r \cos(\omega t + \phi'), r \sin(\omega t + \phi'))$$

$$\dot{x}^\mu(\xi^\nu) = (\gamma, -\gamma \omega r \sin(\omega t + \phi'), \gamma \omega r \cos(\omega t + \phi')) \quad (3.42)$$

Ora possiamo applicare la procedura d'immersione e ottenere la metrica generalizzata in funzione delle coordinate rotanti (t, r, ϕ') :

$$d\bar{s}^2 = (1 - a(r)\omega^2 r^2) dt^2 - b(r) dr^2 - a(r)r^2(d\phi'^2 + 2\omega d\phi' dt) \quad (3.43)$$

dove $a(r) = 1 + (\gamma\omega/m)^2$ e $b(r) = 1 + (\gamma^2\omega/m)^2$

Questa metrica si riduce alla forma consueta (3.35) nel limite classico $\hbar/mc \rightarrow 0$, quando le correzioni quantistiche sono trascurabili.

Osserviamo che il tempo proprio relativistico per una particella che si muove su una circonferenza di raggio R (ponendo $v = \omega R$) è dato, in accordo con la metrica modificata, da:

$$d\tau^2 = dt^2(1 - v^2 a(r)) = dt^2 \left[1 - v^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{m^2(1 - v^2)} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Dalla (3.40) la quadriaccelerazione è

$$|\ddot{x}^\mu \ddot{x}_\mu| = v^2 \omega^2 / (1 - v^2)^2 \quad (3.45)$$

cosicchè possiamo scrivere:

$$d\tau^2 = dt^2(1 - v^2)(1 - |\ddot{x}^\mu \ddot{x}_\mu|/m^2) \quad (3.46)$$

Il nuovo invariante (3.43) si accorda quindi con la (1.11) e inoltre la (3.45) implica un limite superiore anche sulla velocità angolare come evidenziato anche da Toller [23].

Un'altra importante conseguenza è che l'accelerazione è sorgente di curvatura. Proprio come nel caso di Rindler l'immersione nello spazio ad otto dimensioni genera uno spazio quadridimensionale curvo con una curvatura scalare:

$$R = \frac{2\omega^4 m^2 [m^2(1 - \omega^4 r^4) + \omega^2]}{[m^2(1 - \omega^2 r^2) + \omega^2]^2 [m^2(1 - \omega^2 r^2)^2 + \omega^2]} \quad (3.47)$$

che si riduce a zero quando uno può trascurare le correzioni quantistiche.

Come nel caso di Rindler, molti autori [56 - 61] hanno studiato l'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare nella metrica rotante classica (3.35). Possiamo analizzare l'equazione di Klein-Gordon per la metrica generalizzata (3.43). Otteniamo

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial \phi'} \right)^2 - \frac{1}{ar^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi'^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - f(r) \frac{\partial}{\partial r} + m^2 \right] \Phi = 0 \quad (3.48)$$

dove

$$f(r) = \frac{1}{rb} + \frac{\omega^4 \gamma^4 r}{bm^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{2\gamma^2}{b} \right) \quad (3.49)$$

Nel limite classico $\hbar/mc \rightarrow 0$ la (3.48) si riduce all'equazione

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial \phi'} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi'^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m^2 \right] \Phi = 0 \quad (3.50)$$

che ha soluzione [56]

$$\Phi = \frac{1}{2\pi |2\Omega|^{1/2}} e^{i\phi'} e^{-i(\Omega - l\omega)t} J_l(qr) \quad (3.51)$$

con la restrizione $\Omega^2 = q^2 + m^2$, dove J_l sono funzioni di Bessel, l è un intero $q \geq 0$. Lo spettro energetico è continuo e questo è evidente anche senza una soluzione esplicita.

Infatti cerchiamo soluzioni tali che

$$\Phi = S(r) e^{i\phi'} e^{-i(\Omega - l\omega)t} \quad (3.52)$$

e otteniamo l'equazione radiale

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l^2}{r^2} + m^2 - \Omega^2 \right] S(r) = 0 \quad (3.53)$$

e definendo

$$S(r) = r^{-1/2} u(r) \quad (3.54)$$

abbiamo un'equazione Schrödinger-like

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - (\Omega^2 - m^2) + V_{eff} \right] u(r) = 0 \quad (3.55)$$

con un potenziale efficace

$$V_{eff} = \left(l^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} \quad (3.56)$$

È evidente che $V_{eff} \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$ e $V_{eff} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Ora riduciamo la (3.48) a un'equazione Schrödinger-like e cerchiamo soluzioni della forma (3.52).

Introduciamo una nuova variabile ρ tale che:

$$d\rho = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 r^2)^2 + \omega^2/m^2}}{1 - \omega^2 r^2} dr \quad (3.57)$$

allora poniamo

$$S(\rho) = \chi(\rho) u(\rho) \quad (3.58)$$

dove $\chi(\rho)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{d\chi}{d\rho} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\omega^4 \gamma^6 r}{m^2 b^{3/2}} + f(r) \sqrt{b} \right) \chi \quad (3.59)$$

e la (3.48) si riduce all'equazione Schrödinger-like

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - (\Omega^2 - m^2) + V_{eff}(\rho) \right] u(\rho) = 0 \quad (3.60)$$

con un potenziale efficace

$$V_{eff} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{l^2}{a} - \frac{1}{4b} \right) + \frac{\omega^4 \gamma^6}{b^2 m^2} \left[\frac{b(1 + \omega^2 r^2)}{a} - 1 - \frac{\omega^4 \gamma^4 r^2}{am^2} - \frac{3\omega^4 \gamma^2 r^2 b}{4a^2 m^2} \right] \quad (3.61)$$

in cui r è collegato a ρ dalla (3.57).

Va sottolineato che nel limite $\hbar \rightarrow 0$ le equazioni (3.57), (3.58), (3.59) si riducono alla trasformazione (3.54) e il potenziale efficace (3.61) diviene quello classico (3.56). Per esprimere il potenziale in funzione di ρ bisogna risolvere l'integrale derivante dalla (3.57). Lo si può fare nell'approssimazione $r \rightarrow 0$ e si ha $\rho \simeq r$, oppure nell'approssimazione $r \rightarrow \omega^{-1}$ e si ottiene $\rho \simeq (2M)^{-1} \log|\omega r + 1|/|\omega r - 1|$. Si può dunque studiare il potenziale

(3.61) per valori piccoli di ρ ($\rho \rightarrow 0$) sostituendo r con ρ ($V_1(\rho)$) e per valori grandi di ρ ($\rho \rightarrow \infty$) sostituendo nella (3.61) r con $\omega^{-1} \operatorname{tgh}(M\rho)$ ($V_2(\rho)$). Si ha che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_1(\rho) = +\infty \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_2(\rho) = (m/2)^2$$

Il comportamento del potenziale efficace nelle regioni asintotiche sarà dunque quello decrescente classico per ρ piccoli e tenderà asintoticamente a $(m/2)^2$ per valori molto grandi di ρ e non ad infinito come accadeva nel caso di Rindler modificato, ma neanche a zero come nel caso classico (3.56).

Chiaramente il successo di una teoria è legato anche alla possibilità di poter effettuare degli esperimenti in grado di provarne le previsioni. Un possibile test di esistenza dell'accelerazione propria massima, potrebbe consistere nella misura della dilatazione del tempo, confrontando il tempo di vita medio proprio $\Delta\tau$ con il tempo di vita nel sistema di riferimento solidale con il laboratorio, di un fascio di muoni che ruotano con frequenza angolare ω in un anello di raggio R . In questo caso dobbiamo servirci della (3.44) e la relazione fra tempo proprio e tempo del laboratorio può essere scritta come

$$\Delta t = \frac{\gamma \Delta\tau}{\sqrt{1 - \gamma^4 \omega^4 R^2 m^{-2}}} = \gamma \Gamma \Delta\tau \quad (3.62)$$

dove, oltre al consueto fattore di dilatazione relativistico γ , compare un nuovo fattore di dilatazione Γ che dipende dal rapporto fra l'accelerazione della particella e la massima accelerazione. Perfino considerando il caso del LEP collider al CERN, dove sono raggiungibili valori di γ dell'ordine di 10^5 e valori estremamente alti dell'accelerazione (dell'ordine, nel riferimento proprio, di 10^{25} cm/s^2 [60, 61]), si trova tuttavia che le deviazioni di Γ dall'unità sono solo dell'ordine di 10^{-18} . Anche per gli esperimenti classici della relatività generale gli effetti dovuti all'accelerazione massima sono così piccoli da confondersi con l'incertezza sulle misure.

Se l'accelerazione massima fosse mass-dependent, i migliori candidati per un'eventuale test sarebbero particelle di massa vicina a zero (per esempio i neutrini se essi avessero massa). Un test sperimentale sulle oscillazioni dei neutrini in un campo gravitazionale debole in presenza di accelerazione massima è stato suggerito nel 1990 da Caianiello et al. [41], mentre un esperimento con fotoni che acquisiscono una massa efficace quando si muovono in una cavità risonante è stato proposto molto recentemente da Papini et al. [62]. Dai risultati sperimentali di questi test si attende una conferma della validità del modello presentato.

4 RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

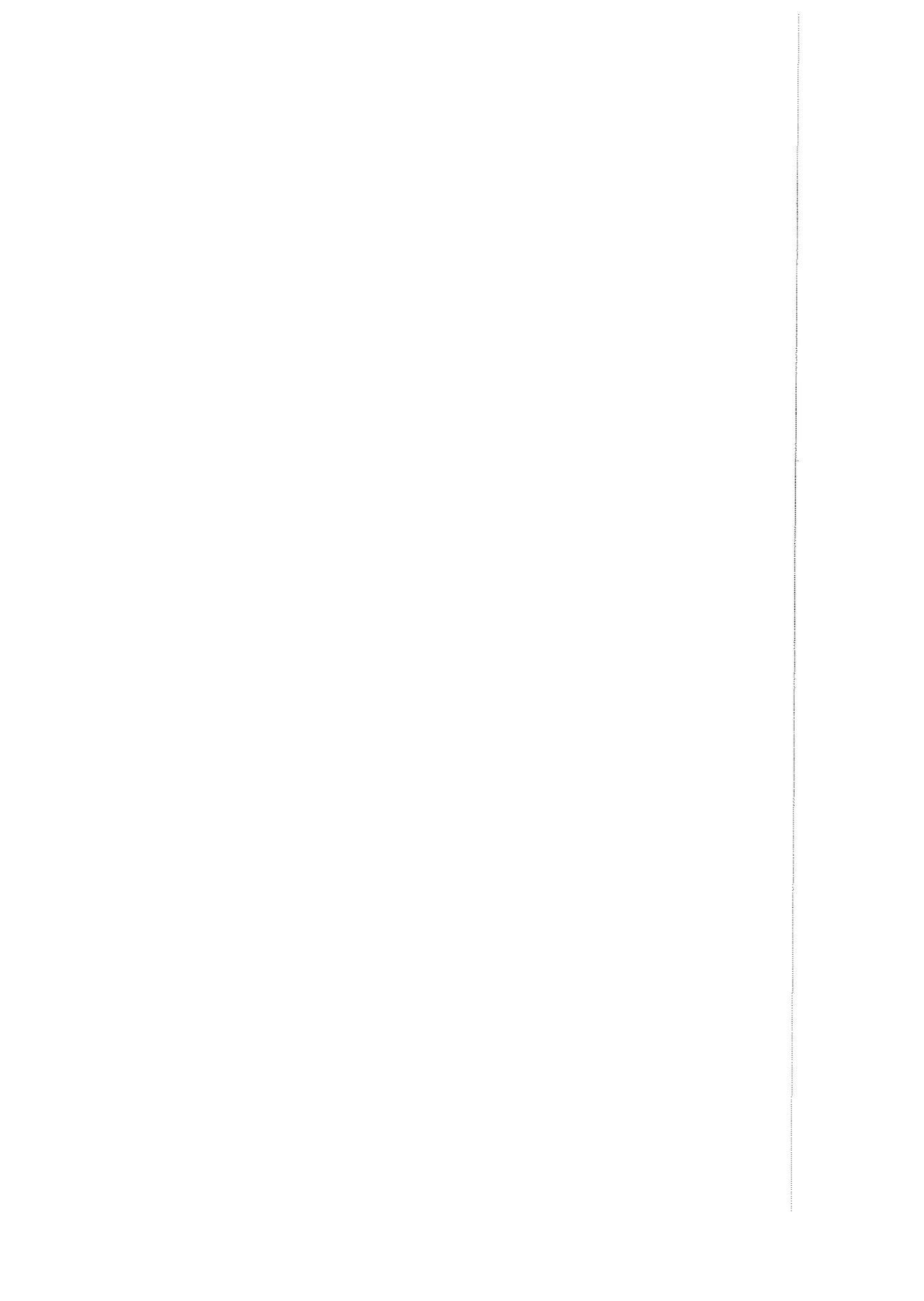
1. E.R. Caianiello: Lett. Nuovo Cimento 25, 225 (1979)
2. E.R. Caianiello: Lett. Nuovo Cimento 27, 89 (1980)
3. E.R. Caianiello: Il Nuovo Cimento B59, 350 (1980)
4. E.R. Caianiello, G. Vilasi: Lett. Nuovo Cimento 30, 469 (1981)

5. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento* 32, 65 (1981)
6. E.R. Caianiello, S. De Filippo, G. Vilasi: *Lett. Nuovo Cimento* 33, 555 (1982)
7. E.R. Caianiello, S. De Filippo, G. Marmo, G. Vilasi: *Lett. Nuovo Cimento* 34, 112 (1982)
8. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento* 35, 381 (1982)
9. E.R. Caianiello, G. Scarpetta, G. Marmo: *Lett. Nuovo Cim.* 36, 487 (1983)
10. E.R. Caianiello, G. Marmo, G. Scarpetta: *Lett. Nuovo Cimento* 37, 361 (1983)
11. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento* 38, 539 (1983)
12. E.R. Caianiello, G. Landi: *Lett. Nuovo Cimento* 42, 70 (1985)
13. E.R. Caianiello, G. Scarpetta, G. Marmo: *Nuovo Cimento* A86, 337 (1985)
14. E.R. Caianiello, W. Guz: *Lett. N. Cim.* 43, 1, (1985)
15. E.R. Caianiello, W. Guz: *Nuovo Cimento* A99, 677 (1988)
16. E.R. Caianiello: *La rivista del Nuovo Cimento* vol. 15 n.4 (1992)
17. E.R. Caianiello: *Lett. Nuovo Cimento* 41, 370 (1984)
18. W.R. Wood, G. Papini, Y.Q. Cai: *Nuovo Cimento* B104, 361 e (errata corrige) 727 (1989)
19. A.K. Pati: *Europhys. Lett.* 18, 285 (1992)
20. H.E. Brandt: *Lett. Nuovo Cimento* 38, 522 (1983) e (errata corrige) 39, 192 (1984)
21. H.E. Brandt: *Found Phys. Lett.* 2, 39 (1989) and references therein
22. M. Toller: *Nuovo Cimento* B102, 261 (1988)
23. M. Toller: *Int. J. Theor. Phys.* 29, 963 (1990)
24. B. Mashoon: *Physics Letters* A143, 176 (1990) and references therein
25. P. Caldirola: *Lett. Nuovo Cimento* 32, 264 (1981)
26. W.R. Wood, G. Papini Y.A. Cai: *Il Nuovo Cim.* B104, 653 (1989)
27. G. Papini, W.R. Wood: *Phys. Lett.* A170, 409 (1992)
28. M. Gasperini: *Gen. Rel. Grav.* 24, 219 (1992)
29. V.P. Frolov and N. Sanchez: *Nucl. Phys.* B349, 815 (1991)
30. N. Sanchez: in "Structure: from Physics to General Systems" Eds. M. Marinaro e G. Scarpetta (World Scientific, Singapore, 1993) Vol.1 p.118
31. G.W. Gibbons, S.W. Hawking: *Phys. Rev.* D15, 2738 (1977)

32. G. Scarpetta: *Lett. Nuovo Cimento* 41, 51 (1984)
33. W. Guz, G. Scarpetta: in "Quantum Field Theory", ed. F. Mancini (Elsevier Science Publisher B. V., 1986) pag. 233
34. H.E. Brandt: *Found. Phys. Lett.* 4, 523 (1991)
35. H.E. Brandt: *Found. Phys.* 21, 1285 (1991)
36. H.E. Brandt: *Intern. J. Theor. Phys.* 31, 575 (1992)
37. H.E. Brandt: *Found. Phys. Lett.* 5, 43 (1992)
38. H.E. Brandt: *Found. Phys. Lett.* 5, 221 (1992)
39. E.R. Caianiello, A. Feoli, M. Gasperini, G. Scarpetta: *International Journal of Theoretical Physics*, 29, 131 (1990)
40. A. Feoli, G. Scarpetta: in "Advances in Theoretical Physics" ed. E.R. Caianiello (World Scientific, Singapore, 1991) p. 68
41. E.R. Caianiello, M. Gasperini, G. Scarpetta: *Nuovo Cimento* B105, 259 (1990)
42. W. Rindler: *Am. J. Phys.* 34, 1174 (1966)
43. P.C.W. Davies: *J. Phys. A.*, 8, 609 (1975)
44. W.G. Unruh: *Phys. Rev.*, D14, 870 (1976)
45. W. G. Unruh, R.M. Wald: *Phys. Rev.* D25, 942 (1982)
46. W.G. Unruh, R.M. Wald: *Phys. Rev.* D29, 1047 (1984)
47. S. Takagi: *Prog. of Theor. Phys., Supplement* N. 88 (1986)
48. D.W. Sciama, P. Candelas, D. Deutsch: *Advances in Physics* 30, 327 (1981)
49. D.J. Raine, D.W. Sciama, P.G. Grove: *Proc. R. Soc. Lond.* A435, 205 (1991)
50. M. Abramowitz, I. Stegun: "Handbook of Mathematical Functions" (Dover, New York, 1970)
51. L.C. Davis: *Phys. Rev.* B14, 5523 (1976)
52. A. D. Boardman, R. Garcia-Molina, A Grass-Martí e E. Lovis: *Phys. Rev.* B32, 6045 (1985)
53. V. Cataudella: "Modi elettromagnetici in cunei dielettrici e strisce metalliche" Ph. D. Thesis, Università consorziate di Napoli e Salerno, (1990)
54. C. Rebbi: *Phys Rep.* 12, 1 (1974)
55. H. J. de Vega, N. Sanchez: *Nucl. Phys.*, B299, 818 (1988)
56. J.R. Letaw, J.D. Pfautsch: *Phys. Rev.* D22, 1345 (1980)

- 57. U.H. Gerlach: Phys. Rev. D27, 2310 (1983)
- 58. S. Takagi: Prog. Theor. Phys. 72, 1270 (1984)
- 59. O.B. Zaslavskii: Class. Qu. Grav. 8, L103 (1991)
- 60. J.S. Bell, J.M. Leinaas: Nucl. Phys. B212, 131 (1983)
- 61. J.S. Bell, J.M. Leinaas: Nucl. Phys. B284, 488 (1987)
- 62. G.Papini, A.Feoli, G.Scarpetta: Phys. Lett. A202, 50 (1995)

Ringraziamenti: Desidero ringraziare il prof. Eduardo Caianiello, leader e ispiratore del nostro gruppo di ricerca fino alla sua prematura scomparsa avvenuta nel 1993, e creatore della "Quantum Geometry", e i professori Gaetano Scarpetta e Maurizio Gasperini con i quali ho collaborato per il raggiungimento dei risultati contenuti in questo lavoro.



UNA MESSA A PUNTO NELLA CORRISPONDENZA GALILEO GALILEI - FULGENZIO MICANZIO

Nota di Teresa Quagliariello
Presentata dal Socio Bruno D'Argenio

Adunanza del 6 maggio 1995

Riassunto

Il ms. Reg. lat. 2021, 63-90 rinvenuto nella Biblioteca Apostolica Vaticana ha permesso di precisare che le postille di Galileo alle *Esercitazioni Filosofiche* di Antonio Rocco furono sicuramente in numero di 75. La corrispondenza Galileo Galilei - Fulgenzio Micanzio permette di stabilire una più appropriata successione delle postille lunghe.

Il contenuto della prima postilla di detto manoscritto è relativo anche alla resistenza di un mezzo attraversato da un grave, che Galileo trattò più ampiamente in *Discorsi e Dimostrazioni* (1638) giornata I (E.N. Vol. VIII). Giovanni Alfonso Borelli, di cui si legge il monogramma di appartenenza (A.G.B.) in Reg. lat. 2021, 90 riprese l'argomento sia in *De Vi Percussionis* (1667) che in *De Motionibus Naturalibus a Gravitate Pendentibus* (1670).

Si potrebbe ritenere che questa linea di ricerca abbia poi portato Nicola Cirillo a porre il problema dell'assorbimento dell'energia sismica nel mezzo (Phil. Trans. Roy. Soc., 1732), che fu così trattato per la prima volta, in occasione del terremoto in Puglia del 20 marzo 1731.

Abstract

Ms. Reg. lat. 2021, 63-90, found at the Vaticana Apostolica Library, establishes that Galilei's marginal notes in Antonio Rocco's *Esercitazioni Filosofiche* were 75. Galileo Galilei's correspondence with Fulgenzio Micanzio allows us to point out a more appropriate sequence of the long marginal notes. The first marginal note deals with the resistance of a medium to a crossing body, more extensively treated by Galilei in *Discorsi e Dimostrazioni* (1638), Day I (E. N. Vol. VIII). Later on, Giovanni Alfonso Borelli, whose monogram (A. G. B.) is in Reg. lat. 2021, 90 dealt again with this subject both in *De Vi Percussionis* (1667) and in *De Motionibus Naturalibus a Gravitate Pendentibus* (1670).

We might suppose that this research later induced Nicola Cirillo to introduce the problem about the material absorption of seismic energy (Phil. Trans. Roy. Soc., 1732), which was first studied on March 20rd, 1731 earthquake which occurred in Puglia.

PREMESSA

Un manoscritto relativo a due postille di Galileo Galilei alle *Esercitazioni Filosofiche* di Antonio Rocco, nelle quali questi fece una critica pretenziosa e ridicola al Dialogo di G.G. (E.N., Vol. VII), è stato da me consultato nella Biblioteca Apostolica Vaticana. Frequentare la B.A.V. mi è sembrato opportuno nel corso di una ricerca che si propone di contribuire a stabilire il più chiaramente possibile come siano andate maturando nelle nostre contrade le teorie e le applicazioni in Sismologia, a partire dalla assimilazione del metodo galileiano fino al 1857. Questo anno è segnato dal terremoto del 16 dicembre che ha interessato particolarmente il Vallo di Diano e la Val d'Agri. Tale terremoto fu occasione dell'incontro di Robert Mallet (Mallet, 1862), ingegnere civile, socio della Società Reale di Londra, comandato dalla Società di effettuare una spedizione nell'interno del Regno di Napoli, con la scuola universitaria napoletana, particolarmente con i Proff. Luigi Palmieri e Arcangelo Scacchi, soci dell'Accademia Reale delle Scienze di Napoli e inoltre con l'ingegnere civile Palmieri del Corpo degli Ingegneri di Ponti e Strade di Salerno.

Due mi sono sembrate le tappe più importanti di questo percorso di ricerca: alcune opere di Nicola Cirillo (1671-1735), (Baldini, 1981) e di Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679), (Baldini, 1970).

Per intraprendere tale percorso è stato essenziale richiedere alla Società Reale di Londra ogni documentazione relativa alla corrispondenza di Nicola Cirillo e di Giovanni Alfonso Borelli con esponenti e segretari della S. R. L.. In particolare, la corrispondenza Borelli-Collins mi ha indotta a procedere a una ricerca presso la Biblioteca Apostolica Vaticana, sui manoscritti già appartenuti alla Regina Cristina di Svezia, mecenate di G. A. Borelli, dopo l'estradizione di lui da Messina. In effetti Newton (*Commercium Epistolicum*, 1856) non si contentò della traduzione fatta da altri della lettera Collins-Borelli del 1671 e pervenuta a Borelli quando egli si trovava ancora a Messina.

Newton ha prodotto perciò una propria traduzione della parte inerente alla comunicazione dei suoi studi e nota che la lettera di Collins, esistente presso l'Archivio della Società Reale di Londra, manca dell'indicazione di una qualsiasi delle serie algebriche sulle quali egli aveva lavorato per proporre i prodromi del calcolo infinitesimale. E' da notare però che la traduzione in latino fatta da altri presenta, come ho potuto rilevare dalla copia della lettera Collins-Borelli ricevuta dall'Archivio della S. R. di Londra, uno spazio libero che avrebbe potuto essere occupato dalla detta serie, che ho pensato potesse essere inclusa nella lettera che infine pervenne a Borelli a Messina. Questa particolare ricerca ha portato anche a consultare il Manoscritto 2021, 63-90,

intitolato "Difesa delle leggi del moto" nel Codice-Inventario dei manoscritti della Regina Cristina e nel Catalogo alfabetico che da esso dipende. ⁽¹⁾

Il manoscritto Reg. lat. 2021, 63-90, è pervenuto alla Regina di Svezia dal medico Pietro Michon Bourdelot, che fu alla corte di Cristina e che aveva ereditato da Giovanni Bourdelot, referendario di Caterina dei Medici a Parigi, il cognome e i beni quali una ricchissima biblioteca. Infatti, in cima al foglio 63 si legge Bourdelot. Il manoscritto porta in fondo al foglio 90 il monogramma di Giovanni Alfonso Borelli, quindi dovette essere, forse come dono di Cristina, tra le carte più preziose di questo scienziato, galileiano e cresciuto sotto l'influenza di Tommaso Campanella, che non ebbe in sorte di incontrarsi con Galileo per quanto se ne sa finora.

1. L'ULTIMA PAGINA DEL MANOSCRITTO RINVENUTO MESSA A CONFRONTO

Emozionante è stata la sorpresa di costatare, in verità non immediatamente, che il Manoscritto riguardava alcune delle postille lunghe che Galileo aveva scritto a salace commento delle *Esercitazioni Filosofiche* di Antonio Rocco.

E' noto che Galileo aveva inserito 72 postille brevi a piè di pagina del libro di Antonio Rocco. Dal confronto della postilla presente nel Manoscritto alle pag. 83-90 e relativa alla VIII e ultima Esercitazione con la prima postilla lunga (E.N. VII pag. 712-721), relativa alla I Giornata del Dialogo, si è costatato che alla pag. 90 del Manoscritto si leggono le seguenti parole che qui si pongono a confronto con quelle presenti in E.N. VII, pag. 720-721.

Reg. lat. 2021, 90

E per finir questa settantacinquesima postilla, dove voi dite, che non senza mistero ho scritto in lingua nostrana per farmi Capo popolare appresso i poco intendenti, et che non pescano ne i profondi reconditi del Liceo, (meglio ci quadrava di Prisciano) e soggiungnete che questo mio pensiero non è fallace in pratica: errate, in tutto, e per tutto, et voi stesso potete a voi medesimo essere ottimo testimonio, il quale, essendo tra i pochissimi intendenti delle cose scritte da me, non solamente non vi siete fatto mio seguace, ma mi havete posto un odio capitale e soggiugnendo voi appresso che il n.º de i balordi e corrivi, che inconsideratamente conferiscono gli honori, è infinito, dovevi, per

¹ Il Catalogo alfabetico (Wilmart, 1937) costituisce ora il N. 2122 del Codice Inventario.

mio parere, eccettuarne quelli che voi scrivete havervi offerto gli honori delle Cattedre principali, perchè, se voi li lasciate tra quella moltitudine infinita, spacciate loro per balordi e corrivi, e sentenzierete voi stesso per immeritevole de gli honori offertivi.

Segue il monogramma di Borelli A.G. B.

E. N. Vol VII, 720-721 postilla alla VIII Esercitazione Filosofica: da pag. 697 linea 20 con postilla breve [69] a pag. 698 linea 3 con postilla breve [70]

Dove voi dite che non senza mistero ho scritto in lingua nostrana per farmi capo popolare appresso i pochi intendenti e che non pescano ne i profondi reconditi del Liceo, e soggiungete che questo mio pensiero non è forse fallace in pratica, errate, in tutto e per tutto, e voi stesso potete a voi medesimo essere ottimo testimonio, il quale, essendo così poco intendente delle cose scritte da me che ben si può dire che poco più che niente ne capite, pure non solamente non vi siete fatto mio seguace, ma mi avete posto un odio capitale. E soggiugnendo appresso, che il numero de' balordi e corrivi, che inconsideratamente conferiscono gli onori, è infinito, dovevi, per mio parere, eccettuarne quelli che a voi hanno offerto gli onori delle cattedre principali, perchè se voi gli lasciate tra quella infinita moltitudine, voi spacciate loro per balordi e corrivi e sentenzierete voi stesso per immeritevole de gli onori offertivi.

Della postilla della E. N. manca ogni numerazione. Tale numerazione, presente quindi solamente in Reg. lat. 2021, 63-90 oltre che nel contesto a pag. 90, anche in cima alla pag. 83, permette di proporre un criterio di numerazione anche per le altre postille lunghe. Le postille brevi, in numero di 72, furono numerate da Galileo e si trovano autografe nella Bibl. Naz. di Firenze. Ora è evidente che Galileo ha seguito l'ordine delle *Esercitazioni Filosofiche* di A. Rocco, mentre Favaro nella E. N. ha seguito per le postille lunghe le giornate del Dialogo; in effetti a Favaro è da presumere mancasse ogni indicazione numerica sui manoscritti e sul libro a stampa di cui si è servito per compilare le postille lunghe. L'altra postilla lunga presente in Reg. lat. 2021, 63-82r, e relativa alla Esercitazione VII (E. N., Vol VII, pag. 686 linea 36 - pag. 688 linea 6) e alla II giornata del Dialogo costituirebbe pertanto la 74ma postilla. L'ultima postilla lunga (E. N. Vol. VII, pag. 744-750) non presente nel manoscritto ora rinvenuto, relativa anche alla VII Esercitazione (E. N., Vol VII, pag. 682 linea 19 - pag. 683 linea 29 e alla II giornata del Dialogo) costituisce la I postilla lunga che farebbe seguito alla 72ma postilla breve ed è virtualmente la 73ma. Tale postilla è relativa ad alcune pagine della VII Esercitazione che,

come annotato, precedono quelle che furono oggetto di una postilla che quì si é detto essere la 74ma, almeno virtualmente.

2. DALLA CORRISPONDENZA GALILEO GALILEI - FULGENZIO MICANZIO, UNA CONVALIDA

L' arrivo a Venezia della 75ma postilla inviata da Galileo il 4 marzo 1634 é assicurato in data 11 marzo da Fulgenzio Micanzio, il Servita amico, succeduto a Paolo Sarpi al servizio della Serenissima quale Teologo e Canonista.

Due volte in questa lettera (E. N. Vol. XVI, pag. 61) viene indicato il numero d' ordine della postilla e Micanzio scrive di essere interessato alla lettura di queste postille come a quella del Dialogo, che si dice certo sar  tradotto in tutte le lingue. Egli, inoltre, premura Galileo di inviargli altre postille, proponendogli di farne un libretto.

Il 5 agosto Fulgenzio, dopo aver ribadito la sicura divulgazione in tutte le lingue del Dialogo, cos  come era successo per le opere di Paolo Sarpi, confida a Galileo di venire continuamente infastidito a Venezia da coloro che hanno letto la 75ma postilla, perch  ritengono che egli detenga le altre come gioielli negli scrigni senza volerle divulgare. Anche Antonio Rocco ha letto la 75ma postilla e Fulgenzio informa Galileo il 12 agosto che il malcapitato ne fa una risposta, assai modesta, che non risolve nulla, ma non essendo ancora copiata, sar  inviata a Firenze nel prossimo dispaccio. A Venezia giunge una seconda postilla e Fulgenzio, accusandone ricevuta il 19 agosto, informa inoltre Galileo di voler leggere prima la risposta di Rocco alla 75ma postilla, che poi gli invier .

La replica di Rocco alla 75ma postilla, scrive Fulgenzio il 9 settembre,   in mano di Mons. Contarini, grande ammiratore di Galileo, per cui l' invio   rimandato. Nello stesso dispaccio Fulgenzio informa Galileo di aver ricevuto il residuo della II postilla, che egli ritiene miracolosa con speculazioni mai prima intese o immaginate. Il 23 settembre Fulgenzio ribadisce che la seconda postilla, avuta ormai per intero,   cosa divina.

Possiamo ritenere oggi che questa postilla, presente nel manoscritto Reg. lat. 2021, 63-82, con alcune varianti rispetto a quella inserita da Favaro (E. N. Vol. VII, pagg. 721-744), costituisca la 74ma.

L' unica lettera di Galileo a noi pervenuta, in cui egli fa un preciso riferimento alle postille per le quali   stato impegnato fin dall' inizio dell' anno 1634,   in data 19 novembre. Egli scrive a Fulgenzio che "il dover ricopiare il resto della postilla, che con la presente gli mando" gli ha tolto molto tempo. Questa postilla, non presente nel manoscritto ora ritrovato, che sar  sviluppata nella I giornata di Discorsi e Dimostrazioni, costituisce virtualmente, come si   detto, la 73ma, la postilla dell' infinito, cos  come la defin  Fulgenzio.

In seguito la corrispondenza Galileo-Micanzio, per quanto riguarda l' argomento qui trattato, verte soprattutto sull' invio dei manoscritti relativi a Discorsi e Dimostrazioni, come ampiamente rilevato da Favaro (1907) e commentato da Carugo e Geymonat (1958).

Micanzio sempre sollecita Galileo di inviargli altre postille; ma é significativo che Galileo, che ormai aveva inviato postille fino alla VIII e ultima esercitazione, tace su questo argomento. Egli ormai si dedica all' opera che gli é tanto cara, con la quale contribuisce a porre le basi alle Scienze delle Costruzioni, alla Resistenza dei Materiali (Benvenuto, 1981) e quindi indirettamente alla Sismologia.

3. 74MA POSTILLA, GALILEO, BORELLI, CIRILLO

La postilla 74 é attinente all' oggetto principale di una ricerca consistente in un contributo alla conoscenza dello svolgimento degli studi di sismologia nelle nostre contrade a partire dall' assimilazione del metodo galileiano fino al 1857. Tale ricerca mi ha portato a rinvenire il detto manoscritto. Il problema della resistenza (impedimento) del mezzo attraversato da un grave (E. N. VII pag. 734 linea 22- pag. 744 linea 24) trattato nella postilla ora indicata come 74ma (Reg. lat 2021, 74-82r) fu poi ripreso da Galilei nella giornata I di *Discorsi e Dimostrazioni* (1638) (Galileo, 1958). Borelli, a cui tanto caro doveva essere questo manoscritto al quale nel' ultima pagina relativa alla 75ma postilla aveva apposto il suo monogramma, aveva già trattato questo problema in alcuni capitoli di due suoi libri (Borelli, 1667; Borelli, 1670).

Possiamo ben ritenere che Nicola Cirillo si sia posto il problema dell' assorbimento dell' energia sismica, forte delle considerazioni di Galilei sull' impedimento del mezzo ad essere attraversato da un grave e quindi sul problema dell'urto, affrontato da Borelli nei due libri già citati che precedono il *De Motu Animalium*. Il terremoto in Puglia del 20 marzo 1731, segnò, grazie a Nicola Cirillo, professore di fisica e successivamente di medicina dell' Università di Napoli, socio della Società Reale di Londra, una data importante per gli studi sperimentali e teorici di Sismologia, come é generalmente riconosciuto (Caloi, 1966; Dewey and Byerly, 1969).

Nicola Cirillo, presidente dell' Accademia delle Scienze di Napoli, com' é noto, fu studioso non solo di Cartesio, ma di Galilei, di Borelli e di Newton. Non deve sfuggire che il Dialogo e la lettera alla Granduchessa di Toscana (1710), oltre che le tre edizioni di *Saggi di Naturali Esperienze* fatte nell' Accademia del Cimento (1701, 1704, 1714) furono stampate a Napoli giusto durante il magistero universitario di Nicola Cirillo, il quale peraltro nelle sue lezioni di fisica insegnava le idee di Newton (Zambelli, 1972, p. 32). Oggi la Società Reale di Londra conserva alcune lettere di questo grande studioso,

mentre quì a Napoli la sua biblioteca, che fu poi di Domenico Cirillo, medico ed esponente della Commissione Legislativa e poi Presidente della medesima durante la Repubblica Napoletana del 1799, fu incendiata dal popolo in rivolta.

Le misure con pendoli per lo studio dell' assorbimento dell' energia sismica nel mezzo effettuate per la prima volta per il terremoto in Puglia, furono certamente ripetute in occasione delle repliche del terremoto del 29 novembre 1732 in Irpinia, perché Cirillo informa il 23 marzo 1733 il Segretario della Società Reale di Londra di essere in attesa dei risultati. Questa é però l' ultima lettera di Nicola Cirillo a me spedita dalla Società Reale di Londra.

4. LO STUDIO DELLE OPERE DI BORELLI NELL' ITALIA MERIDIONALE E ALL' ESTERO: DUE ALTERCHI

Si può ritenere indubbio che lo studio delle opere di Borelli sia stato sempre praticato all'estero, come è generalmente riconosciuto, ma altresì nelle nostre contrade. Una delle prove, anche se minore, può essere la corrispondenza tra il medico-fisico Felice Roseto e Antonio Vallisnieri (Roseto, 1722). Felice Roseto fu allievo di Nicola Cirillo, egli é menzionato come uno di coloro che eseguirono misure di ampiezza di oscillazione ai pendoli muniti di graduazione in occasione del terremoto in Puglia del 20 marzo 1731 (Cirillo, 1732). La corrispondenza dette luogo ad una forte replica di un altro medico, Domenico Maurodenoja di Bari (Maurodenoja, 1734). Quest' ultimo si oppose a Felice Roseto che aveva inviato a Vallisnieri una lettera sul sistema nervoso nel corpo umano, ove cita Borelli in *De Vi Percussionis* e ovviamente riferisce le opinioni di Borelli esposte in *De Motu Animalium*.

La replica di Maurodenoja é tutta fondata sulla convinzione che Felice Roseto abbia ricalcato idee già presenti in Borelli in *De Motu Animalium*.

Ancora una volta é un diverbio che permette di sottolineare come le opere di Borelli siano state ampiamente studiate nell' ambiente medico dell' Italia Meridionale.

All' estero, com'è noto, Newton nella corrispondenza con Halley del 20 giugno 1686 (Newton, *Corrispondence*, Vol. II) asserisce che Hooke, che lo accusa di aver tutto ricavato dalle sue opere, ha invece egli stesso pubblicato l'ipotesi di Borelli (Borelli, 1666) sotto il suo nome.

CONCLUSIONI

La numerazione proposta per le postille lunghe permette di asserire che non v'è alcuna postilla scritta da Galileo a noi non pervenuta. Anche lo stile conclusivo e beffardo dell'ultimo periodo della 75.ma postilla sembra indicativo per sostenere tale convinzione. L'aver enumerato le postille brevi fino alla 72, relativa alla VIII e ultima Esercitazione, ha indotto Galileo a precisare il numero d'ordine dell'ultima postilla, la 75.ma, e però a non scompaginare quanto egli stesso aveva già annotato di suo pugno sul libro di Antonio Rocco.

Il motivo per cui Galileo ha inviato a Venezia la 75.ma postilla prima di ogni altra è probabilmente da ricercare nel contenuto della medesima. Questa è inerente alla I giornata del Dialogo sui Massimi Sistemi e quindi la materia era stata già perfettamente elaborata e stampata.

La II e III postilla successivamente inviate a Venezia sono inerenti alla I giornata dei Discorsi e Dimostrazioni: al tempo dell'invio delle medesime, la stesura definitiva di questo libro era ancora al vaglio della sua mente.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano la direzione e lo staff dell'Archivio della Biblioteca Apostolica Vaticana che hanno reso possibile le ricerche che sono il fulcro del presente lavoro; l'Archivista della Società Reale di Londra e il dott. C. Kilbourne, lo staff della Biblioteca dell'Accademia Nazionale dei Lincei per il prezioso materiale inviato; la dott.ssa Stefania Guardati, già Direttrice della Biblioteca Universitaria di Napoli, il dott. Ettore Pisano, Bibliotecario, che hanno tutti seguito con interesse questo lavoro; il dott. Giulio Raimondi già a capo della Soprintendenza Archivistica per la Campania e ora Direttore dell'Archivio di Stato di Napoli, che ha facilitato i collegamenti con le sedi di Giovinazzo e Ascoli Satriano; la dott. Anna Billi, Direttrice della Biblioteca Brancacciana, sezione della Biblioteca Nazionale di Napoli, che mi ha fornito utili indicazioni, quando iniziai ad affrontare una ricerca a latere a quella mia professionale; il dott. Antonio Nazzaro ricercatore presso l'Osservatorio Vesuviano, che mi ha fornito la nota di Dewey e Byerly (1969).

Si ringraziano infine, ma non ultimi, la dott.ssa Tina Nunziata ricercatrice presso il Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli, la dott.ssa Agata Siniscalchi ricercatrice presso l'Istituto del CNR Geomare Sud di Napoli e il Prof. Maurizio Fedi del Dipartimento di Scienza dei Materiali dell'Università di Lecce che con il loro interessamento per questa ricerca, mi hanno obbligata a presentare questo lavoro.

Teresa Quagliariello (*)

(*) Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia, Università Federico II di Napoli
Largo San Marcellino 10, Napoli

BIBLIOGRAFIA

BALDINI U. (1970). *Borelli G.A.*, Dizionario Biografico degli Italiani, Vol. XII.

BALDINI U. (1981). *Cirillo N.*, Dizionario Biografico degli Italiani, Vol. XXV.

BENVENUTO E. (1981). *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze, Sansoni.

BORELLI G. A. (1666). *Theoricae mediceorum planetarum ex causis physicis deductae*. Florentiae.

BORELLI G. A. (1667). *De vi percussionis*. Bononiae.

BORELLI G. A. (1670). *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, Regio Juliae.

CALOI P. (1966). *Sismografo*, Enciclopedia Scienza e Tecnica, Vol. IX, Milano.

CIRILLO N. (1732). *Historia Terraemotus Apuliam et toto fere Neapolitanum Regnum Anno 1731*, Vexantis Phil. Trans. XXXVIII.

COMMERCIIUM EPISTOLICUM (1856). *D. J. Collins et aliorum de Analysis promotae: Jussu Societatis Regiae in lucem editum: et iam una cum eiusdem recensione praemissa, et iudicio primarii, ut ferebatur, Mathematici subiuncto, iterum impressum. Ou correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII^e siècle, relative à l'Analyse supérieure, réimprimée sur l'édition originale de 1712, avec l'indication des variantes de l'édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par J. B. Biot et F. Lefort*. Paris, Mallet et Bachelier.

DEWEY J. and P. BYERLY (1969). *The early history of seismometry (to 1900)*. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 59, N. 1.

FAVARO A. (1907). *Fulgenzio Micanzio e Galileo Galilei*. Nuovo Archivio Veneto, Vol. 17.

GALILEI GALILEO. *Le opere a cura di A. Favaro*, Edizione Nazionale: Vol VII (1897); Vol VIII (1898); Vol XIV (1905), citato come E. N.

GALILEI GALILEO. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze a cura di Adriano Carugo e Ludovico Geymonat* (1958) Torino.

MALLET R. (1862). *Great Neapolitan Earthquake of 1857. The first principles of observational seismology as developed in the report to the Royal Society of London of the expedition made by command of the Society into the interior of the kingdom of Naples, to investigate the circumstances of the great earthquake of december 1857.* 1-2, Chapman-Hall, London.

MAURODENYA D. (1734). *Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici di A. Calogerà*, Tomo X, pag 277.

NEWTON I. *Corrispondence*, ed. H. W. Turnbull, S. F. Scott, A. R. Hall and L. Tilling (V. 1-7, Cambridge, 1959-77), II, 20 giugno 1686.

ROSETO F. Medico di Giovinazzo nella Puglia ad Antonio Vallisnieri. *Raccolta D'Opuscoli scientifici e filologici di A. Calogerà*, Tomo V 1731 pag 267-281 Maggio 1722.

SAGGI DI NATURALI ESPERIENZE FATTE NELL'ACCADEMIA DEL CIMENTO. Napoli, 1701, 1704, 1714.

ZAMBELLI P. (1972). *La formazione filosofica di Antonio Genovesi*. Napoli, MOrano.

WILMART A. (1937). *Codices Reginenses latini*. Tomus I.

Organometal Fragments Bound to a Coordinatively Saturated d^8 Ion.

Nota di: Maria Bisbiglia¹, Maria E. Cucciolito¹,
Francesco Ruffo¹ and Vincenzo De Felice²

Presentata dal socio: Achille Panunzi

Adunanza del 4 marzo 1995

Sommario Recenti studi hanno consentito di isolare un'ampia classe di complessi pentacoordinati olefinici di Pt(II) di formula generale $[\text{PtCl}(\text{MR}_x\text{Cl}_y)(\text{N-N})(\text{olefina})]$ (N-N= legante bidentato azotato; M= Ge, Sn, Pb, Hg), ottenuti attraverso addizione ossidativa di specie $\text{MR}_x\text{Cl}_{y+1}$ a precursori tricoordinati di Pt(0) di tipo $[\text{Pt}(\text{N-N})(\text{olefina})]$. Anche se preliminarmente, è ora possibile pervenire a qualche conclusione generale sulle caratteristiche del processo di addizione e sulle proprietà salienti dei complessi sintetizzati.

Abstract Recent studies led to isolate several five-coordinate Pt(II) olefin complexes of the type $[\text{PtCl}(\text{MR}_x\text{Cl}_y)(\text{N-N})(\text{olefin})]$ (M= Ge, Sn, Pb, Hg; N-N= nitrogen chelate ligand), obtained through oxidative addition of $\text{MR}_x\text{Cl}_{y+1}$ species to three-coordinate Pt(0) precursors $[\text{Pt}(\text{N-N})(\text{olefin})]$. It is now possible to reach some general conclusions on the features of the addition process as well as on the properties of the compounds.

Keywords: platinum, binuclear complexes, five-coordination, oxidative addition

The interest for molecular species containing two or more metal atoms is rapidly growing [1]. The factors which determine this increasing attention mainly concern:

- a) the use of polynuclear species as catalysts in a number of processes in which mononuclear complexes are less effective or not at all [2].
- b) the study of reactions between high nuclearity clusters and small molecules (CO, NO) which provides a good model for the analysis of interfacial phenomena involving metal surfaces [3].
- c) the presence of two or more ions in many biomolecules, such as the enzyme bovine superoxy-dismutase, where Zn plays a structural role and Cu is the active center [4].
- d) the use of polynuclear complexes in relation to their pharmacological activity [5].

Thus, it is not surprising that several hundred of new polynuclear compounds have been described in the last ten years. These can be usefully divided in two broad classes, depending on whether the metal ions are directly bound or spaced out in the molecule by suitable ligands. The latter is mainly the case of natural systems, even though many efforts have been devoted to the synthesis of species where ligand fragments pertaining to separated coordination spheres can interact [4].

Among the complexes pertaining to the former class, those containing a metal-metal bond between a transition ion and a main group element deserve a particular attention. In fact, the catalytic properties of a transition ion can be strongly enhanced by the presence, in the coordination sphere, of a main group element [6].

Particularly, Sn derivatives [7,8] and to a lesser extent Hg [9] and Pb [8] compounds, are frequently used as cocatalysts in hydrogenation, hydroformylation, isomerization and cross-coupling reactions promoted by Pd, Pt, W, Rh and Ir complexes.

On these grounds and taking into account the experience acquired in this laboratory on platinum chemistry [10], this report focuses the attention

on recently isolated binuclear species containing Pt(II)-Ge, Pt(II)-Sn [11], Pt(II)-Pb and Pt(II)-Hg [12] σ -bonds (Fig. 1).

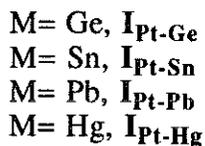
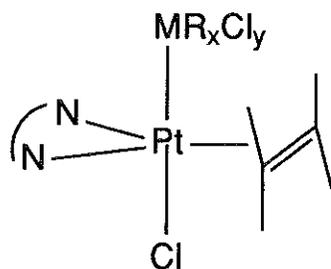


Fig.1

Although the complexes here described are not the first examples of species involving the cited bonds, they present structural and chemical properties which have never been observed before, as will be discussed in detail below.

The main feature of type I complexes is the coordinative saturation of the platinum atom, which is assured by the presence of a nitrogen bidentate ligand possessing suitable steric requirements [10]. The N-N chelate and the alkene define the equatorial plane of the bipyramidal trigonal arrangement, while the chloride and the organoelement fragment occupy the axial positions. It is worth noting that intermediates invoked in relevant catalytic processes promoted by Pt-Sn systems similarly imply the contemporary presence of an olefin and the tin ligand in a five-coordinate platinum(II) complex [13].

RESULTS

Background. Complexes containing Pt(II)-Ge, Pt(II)-Sn, Pt(II)-Pb and Pt(II)-Hg bonds are known. Most of the compounds adopt a square-

planar arrangement around the Pt atom, while scant examples of such binuclear species in a five-coordinate geometry have to date appeared. More precisely, a few coordinatively saturated tin derivatives [14-17] and only one 18 e⁻ mercury complex [14] have been reported.

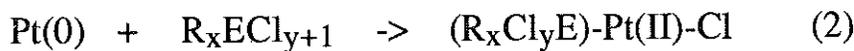
The most represented species are tin derivatives of general formula [PtX(SnY₃)(phosphine)₂] (X,Y= halogen and/or alkyl group), generally obtained through oxidative addition of organotin halides to Pt(0) phosphine precursors [18].

By far less represented are complexes containing a linkage between Pt(II) and Pb. In fact, the literature describes only a few square-planar species containing triorganolead fragments -PbR₃ as ligands [19]. Furthermore, all the attempts to obtain Pt(II)-PbR₂Cl linkages resulted unsuccessful, as they are involved in fast deplumbation reaction (eq. 1) [20].

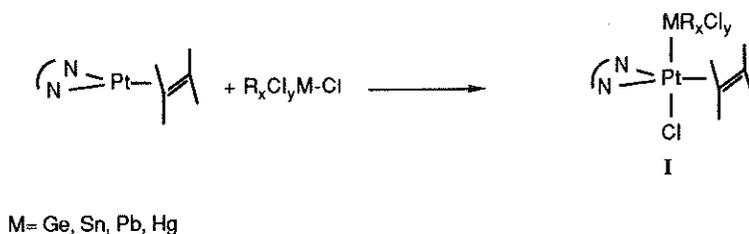


Also involved in decomposition processes are the Pt(II)-Hg-alkyl fragments [21,22]. In fact, the isolation of complexes of general formula [PtR(HgR')(phosphine)₂] can be successfully achieved only if the hydrocarbyl group R' on Hg meets strict requirements. More precisely, the binuclear complexes are stable in the presence of electron-withdrawing substituents (e.g. R'= CF₃) or bulky groups (e.g. R'= 2,5-Cl₂-Ph). Alternatively, they rapidly collapse in solution giving rise to mononuclear Pt(II) complexes [PtR(R')(phosphine)₂]. Finally, we note that although the isolation of square-planar complexes containing a Pt(II)-Ge linkage has already been described during the 60ies [23] the first example of activation of a Ge-Cl bond by a Pt(0) complex has been reported only very recently [24]. This result is mainly related to the reduced reactivity of the Ge-Cl bond when compared with that of Sn-Cl and Pb-Cl linkages.

Synthetic procedures and three-coordinate substrates. Several different synthetic procedures can be used to establish a linkage between Pt(II) and a main group element [6]. To date, the more versatile one appears the oxidative addition of an organoelement chloride ER_xCl_{y+1} to a Pt(0) complex, according to the following equation (2):



The three-coordinate olefin complexes $[Pt(N-N)(olefin)]$ [25] are suitable precursors for the above process. They have been obtained in high yield by reacting $Pt(norbornene)_3$ with the suitable N-N chelate and the olefin in dry diethyl ether at room temperature. The oxidative addition of organo-germanium, -tin, -lead and -mercury chlorides has been adopted for the synthesis of type I complexes, as the following reaction scheme shows:



Scheme 1

The sterically hindered 2,9-dimethyl-1,10-phenanthroline (dmphen) and 6-methylpyridine-2-phenylimine (pimpy) have been used as N-N ligands. Only in some crucial experiments 2-methyl-1,10-phenanthroline (mphen) and 1,10-phenanthroline (phen) were tested as possible chelates. The used N-N ligands and olefins are reported in Fig. 2.

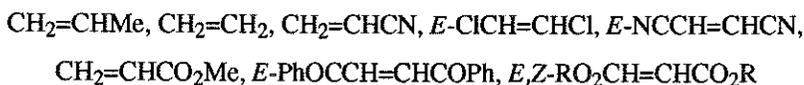
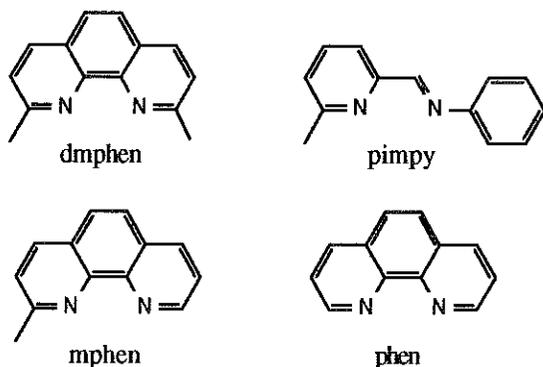
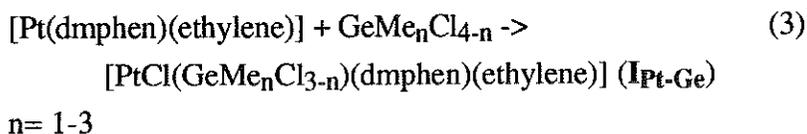


Fig. 2

Concerning the properties of the three-coordinate precursors, we recall that the nature of the coordinated alkene has a great influence on the reactivity of the Pt(0) complexes. In fact olefins bearing electron-withdrawing substituents reduce the nucleophilicity of the metal center, probably because they stabilize the low-oxidation state through a strong π -backdonation. The consequences of this behaviour on the addition process represented by eq. (2) are examined in detail below.

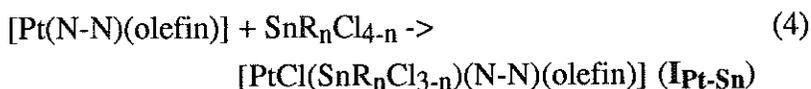
Synthesis of type I species. As outlined before, the attainment of complexes containing Pt(II)-Ge linkages has been limited by the reduced reactivity of the Ge-Cl bonds towards Pt(0) nucleophiles [18]. Thus, the observation that the three-coordinate Pt(0) complex [Pt(dmphen)(ethylene)] is able to activate the Ge-Cl bond of GeMe_3Cl , GeMe_2Cl_2 and GeMeCl_3 (eq. 3) deserves attention.



Type $\mathbf{IPt-Ge}$ complexes are the first class of five-coordinate platinum(II) species containing a Pt-Ge bond. Furthermore, the process depicted in eq. 3 represents the first example of activation of the Ge-Cl bond in GeMe_3Cl .

As a consequence of the low reactivity of the organogermanium reagents, we could not extend the reaction to the less reactive Pt(0) precursors containing olefins with electron-withdrawing substituents (e.g. dimethylmaleate, fumarodinitrile). For example, GeMeCl_3 does not add to $[\text{Pt}(\text{dmphen})(\text{dimethylmaleate})]$ in dry toluene. Alternatively, in wet solvents, the product of the reaction is the known hydrido-complex $[\text{PtH}(\text{Cl})(\text{dmphen})(\text{dimethylmaleate})]$ [26] which forms upon attack of the HCl deriving from the hydrolysis of the Ge-Cl bonds.

According to the good reactivity of Sn-Cl bonds, our results show that organotin chlorides easily add to the three-coordinate Pt(0) precursors. Thus, the reaction of $\text{SnR}_n\text{Cl}_{4-n}$ reagents ($R = \text{Me, Ph; } n = 1-3$) with the three-coordinate precursors $[\text{Pt}(\text{N-N})(\text{olefin})]$ ($\text{N-N} = \text{dmphen}$ and pimpy) leads to the isolation of the first widely represented class of five-coordinate complexes containing a Pt-Sn σ -bond (eq. 4).



$\text{N-N} = \text{dmphen, pimpy; } R = \text{Me, Ph; } n = 1-3$.

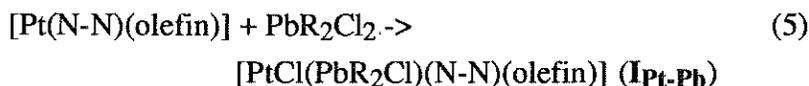
Type $\mathbf{IPt-Sn}$ complexes are crystalline products and can be stored for several months in the solid state without appreciable decomposition.

In chloroform solution, as discussed in detail in the next section, they

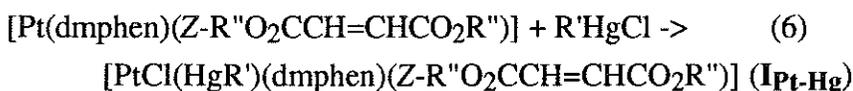
are partially dissociated into the corresponding organotin halides and three-coordinate precursors, at an extent depending on the properties of the ancillary ligands [27].

As briefly reported above, Pt(II)-Hg-alkyl and Pt(II)-PbR₂Cl fragments in square-planar complexes are not stable. The possibility of stabilizing these labile fragments in coordinatively saturated Pt(II) complexes has been successfully attempted in our laboratory.

In fact, the oxidative addition of di-hydrocarbyllead dichlorides PbR₂Cl₂ (R= Me, Ph) and alkylmercury chlorides R'HgCl (R'= Me, Et, *t*-Bu) to the three-coordinate precursors allows the isolation of stable five-coordinate adducts, as depicted in eqs. 5 and 6.



N-N= dmphen, pimpy; R= Me, Ph

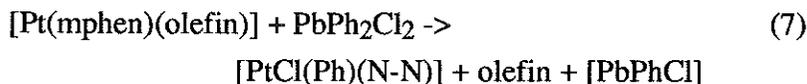


R', R''= Me, Et, *t*-Bu

In the case of type **I_{Pt-Pb}** species, which represent the first example of isolated compounds containing a Pt(II)-PbR₂Cl fragment, the possible choice of the olefin ligand is fairly wide. In contrast, in the case of **I_{Pt-Hg}** complexes only dialkylmaleates Z-R''O₂CCH=CHCO₂R'' can be used, owing to a reduced or more complicated reactivity of the R'HgCl species towards Pt(0) precursors containing other alkenes.

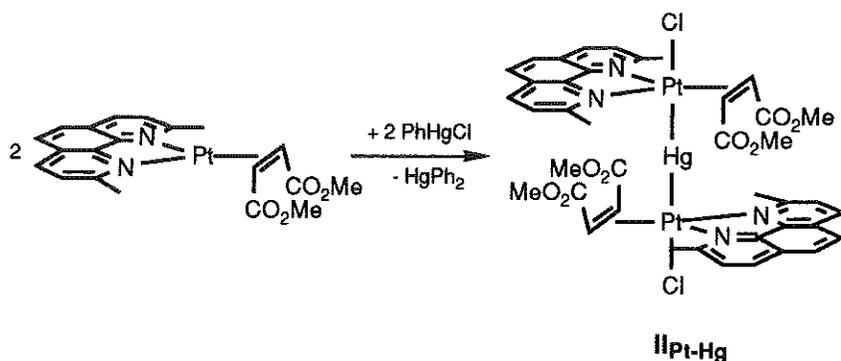
The crucial role played by the steric properties of the N-N ligands in the stabilization of the Pt-M bonds has also been verified during this study. In fact, if the addition of PbPh₂Cl₂ is performed on three-coordinate derivatives containing mphen or phen, the reaction leads only to the isolation of mononuclear Pt(II) complexes, while Pb separates as an

insoluble material (eq. 7):



It is conceivable that the binuclear adduct $[\text{PtCl}(\text{PbPh}_2\text{Cl})(\text{mphen})(\text{olefin})]$ which forms upon addition of the organolead reagent is not stable towards the olefin loss and the corresponding square-planar $[\text{PtCl}(\text{PbPh}_2\text{Cl})(\text{mphen})]$ complex is subsequently involved in the deplumbation reaction.

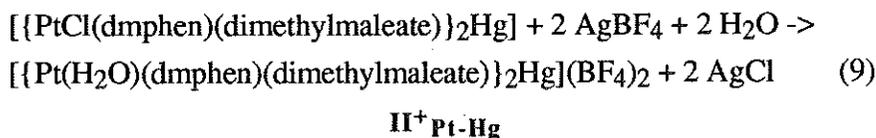
Finally, we note that the course of the addition reaction is different when an arylmercury chloride, i.e. PhHgCl , is used as electrophile. In fact, in this case, the attack leads to a trinuclear cluster containing the sequence Pt-Hg-Pt ($\text{II}_{\text{Pt-Hg}}$), while half equivalent of Hg is recovered as HgPh_2 (eq. 8).



Most probably, the early product of the oxidative addition is the binuclear complex $[\text{PtCl}(\text{HgPh})(\text{dmphen})(\text{dimethylmaleate})]$. The subsequent rearrangement of this compound to $\text{II}_{\text{Pt-Hg}}$ and HgPh_2 is probably a consequence of the enhanced tendency of Hg-aryl bonds to undergo redistribution reactions.

Treatment of $\text{II}_{\text{Pt-Hg}}$ with AgBF_4 in $\text{MeCN}/\text{H}_2\text{O}$ allows the attainment

of the related cationic complex $\text{II}^+\text{Pt-Hg}$, where the axial chlorides have been replaced by two molecules of water (eq. 9):



We note that, although other complexes containing the Pt-Hg-Pt sequence have already been described [28], IIPt-Hg and $\text{II}^+\text{Pt-Hg}$ are the first examples involving coordinative saturation around the Pt(II) ion.

Characterization of type I species. The five-coordinate products have been characterized through ^1H and ^{13}C NMR spectroscopy, elemental analyses, conductivity measurements and X-ray diffractometric analyses of some representative complexes.

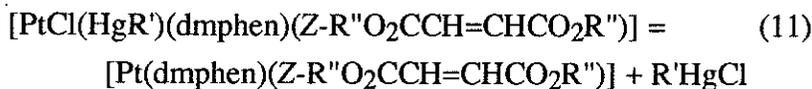
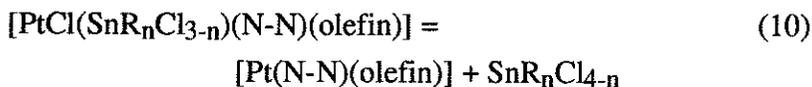
The NMR characteristics which suggest the unequivocal assignment of the trigonal bipyramidal geometry around Pt have been thoroughly described elsewhere [10]. Here, we only briefly report the properties of the ^1H NMR spectra which are common to all the type I species:

- a) Equivalence of the two halves of dmphen in the presence of olefins which possess a mirror plane bisecting the double bond.
- b) High-field shift of the coordinated alkenes signals if compared with those of the free ligands. The shift is always larger than 2 ppm.
- c) High-field shift of the signals of the protons of alkyl groups directly bound to Ge, Sn, Pb and Hg with respect to those of the corresponding organoelement chlorides. As an example, in deuteriochloroform the ^1H NMR chemical shift of SnMe_2Cl_2 is 1.20 ppm while the signals pertaining to coordinated $-\text{SnMe}_2\text{Cl}$ fragments are in the range -0.03-0.98 ppm.
- d) Presence of long-range coupling between the above quoted alkyl

protons and ^{195}Pt nuclei (e.g. the $^3J_{\text{Pt-H}}$ coupling constants values of Pt(II)-Hg-Me fragments are in the range 15-22 Hz).

The X-ray crystal structures of some representative type **I** complexes reveal a pronounced elongation ($> 0.2 \text{ \AA}$) of the Pt-Cl bond *trans* to Sn, Pb and Hg if compared to the value measured on the corresponding di-chloro species [PtCl₂(dmphen)(ethylene)] [29] (Pt-Cl= 2.30 Å). This result indicates a large *trans*-influence played by the metal fragments bound to the Pt(II) ion, analogous to that exerted by sp³ hybridized carbon atoms [30].

Reactivity of type I complexes. The prominent feature of type **I_{Pt-Sn}** and **I_{Pt-Hg}** complexes is their involvement in solution in an oxidative addition-reductive elimination process with the organometal reagent and the Pt(0) precursor [12,27], according to eqs. 10 and 11:



N-N= dmphen, pimpy; in CDCl₃

This is one of the rare cases in which one can observe measurable concentrations of both different metal oxidation states at equilibrium, and probably is unique for the Pt(0)-Pt(II) couple.

The same steric and electronic factors seem to determine the position of the equilibrium for both type **I_{Pt-Sn}** and **I_{Pt-Hg}** species and a large number of NMR experiments has been performed to rationalize the influence exerted by the properties of the ligands.

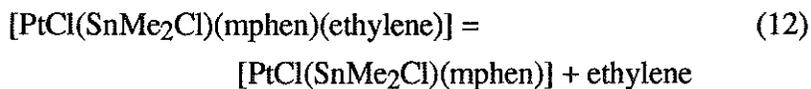
Particularly, the five-coordinate complexes are stabilized by:

- i) the presence of olefins bearing electron-releasing substituents, which probably enhance the nucleophilicity of the metal center.
- ii) an increase in the bulkyness of the olefin substituents. More precisely, by using *E,Z*-RO₂CCH=CHCO₂R olefin ligands (R= Me, Et, i-Pr, t-Bu) a monotone dependance of the equilibrium constant is observed. This result might be a consequence of shorter bond distances Pt(0)-N and Pt(0)-olefin with respect to the Pt(II)-N and Pt(II)-olefin distances in corresponding three- and five-coordinate complexes. Thus, an increase of the R bulkyness might destabilize the Pt(0) precursor more effectively than the Pt(II) product.
- iii) an increase in the number of chlorine atoms on tin, probably because the formal reduction Sn(IV)->Sn(II), which accompanies the reaction, is favoured by electronegative substituents on Sn.
- iv) a decrease in the steric demand of the alkyl groups bound to Hg and Sn.

Some pK_{diss} values relative to the processes described by eqs. 10 and 11 are reported in Table 1.

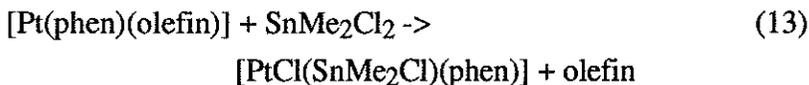
It is to note that type **IPt-Pb** complexes do not show any tendency to dissociate in solution into the precursors. This and the previously cited results suggest the following reactivity order for the M-Cl bonds: M= Pb > Sn > Hg > Ge. As an example, the Pt(0) precursor [Pt(dmphen)(dimethylfumarate)] reacts "irreversibly" with PbR₂Cl₂, while equilibrates in solution with the corresponding five-coordinate complex in the presence of SnR₂Cl₂, and does not appreciably react with RHgCl.

As a final remark, we note that if N-N ligands lacking of suitable steric properties are used in the addition process, the five-coordinate **IPt-Sn** complexes are no more stable towards another process, i.e. the dissociation of the olefin leading to the corresponding square-planar complex [PtCl(SnR₂Cl)(N-N)]. In the presence of mphen the following equilibrium establishes in solution:



$pK_{diss} = 2.5$ (in CDCl_3 at 298 K)

In addition, the even lower stabilizing ability of phen causes the irreversibly loss of the olefin, according to the following example:



CONCLUSIONS

In this work we attempt to gain some general conclusions on the properties of the recently isolated trigonal bipyramidal Pt(II) complexes bearing organometal substituents in axial position. The compounds, obtained through oxidative addition of $\text{MR}_x\text{Cl}_{y+1}$ reagents ($\text{M} = \text{Ge}, \text{Sn}, \text{Pb}, \text{Hg}$) to three-coordinate Pt(0) precursors $[\text{Pt}(\text{N-N})(\text{olefin})]$, deserve attention for several reasons. Particularly we wish to outline:

- a) the coordinative saturation around the transition ion, prompted by the sterical features of the chelate, as the most prominent requisite for the stabilization of ligand fragments generally involved in decomposition processes (e.g. $\text{Pt-PbR}_2\text{Cl}$, Pt-Hg-alkyl).
- b) the observation of a rare oxidative addition-reductive elimination equilibrium between Pt(0) and Pt(II) species. A careful choice of the ligands allows a satisfactory rationalization of the factors which influence the position of the equilibrium.
- c) the enhanced tendency of M-Cl bonds to add to the Pt(0) precursors in the order $\text{M} = \text{Pb} > \text{Sn} > \text{Hg} > \text{Ge}$, which agrees with previous findings involving Pt(0) phosphine complexes [18].

Table 1

pK_{diss} values for some type **IPt-Sn** and **IPt-Hg** complexes
(measured in $CDCl_3$ at 298 K)

[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen)(<i>E</i> -PhOCCH=CHCOPh)]	4.1
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen){ <i>E</i> -(<i>i</i> -Pr)O ₂ CCH=CHCO ₂ (<i>i</i> -Pr)}]	3.8
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(pimpy){ <i>E</i> -(<i>i</i> -Pr)O ₂ CCH=CHCO ₂ (<i>i</i> -Pr)}]	3.8
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(pimpy)(<i>E</i> -EtO ₂ CCH=CHCO ₂ Et)]	3.7
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(pimpy)(<i>E</i> -MeO ₂ CCH=CHCO ₂ Me)]	3.4
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen)(<i>E</i> -ClCH=CHCl)]	3.3
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen)(<i>E</i> -EtO ₂ CCH=CHCO ₂ Et)]	3.2
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen)(<i>E</i> -MeO ₂ CCH=CHCO ₂ Me)]	2.9
[PtCl(SnMe ₂ Cl)(dmphen)(<i>E</i> -PhO ₂ CCH=CHCO ₂ Ph)]	2
[PtCl(HgMe)(dmphen)(<i>Z</i> -EtO ₂ CCH=CHCO ₂ Et)]	2.2
[PtCl(HgMe)(dmphen)(<i>Z</i> -EtO ₂ CCH=CHCO ₂ Et)]	4 ^a
[PtCl(HgMe)(dmphen)(<i>Z</i> -MeO ₂ CCH=CHCO ₂ Me)]	1.8
[PtCl(HgMe)(dmphen)(<i>Z</i> -MeO ₂ CCH=CHCO ₂ Me)]	3.2 ^a

^a Measured at 243 K

REFERENCES

- [1] *Organometallic Chemistry*, The Royal Society of Chemistry, Burlington House, London W1V 0BN.
- [2] P. Braunstein and J. Rose (1989) Heterometallic clusters in catalysis, *Stereochim. Organomet. Inorg. Compd.* 3-138.
- [3] E.L. Muetterties, T.N. Rhodin, E. Band, C.F. Brucker and W.R. Pretzer (1979) Cluster and surfaces, *Chem. Rev.* **79**, 91-137.
- [4] P.A. Vigato, S. Tamburini and D.E. Fenton (1990) The activation of small molecules by dinuclear complexes of copper and other metals, *Coord. Chem. Rev.* **106**, 25-170.
- [5] S. Bartolucci, P. Carpinelli and F. Ruffo (1994) Synthesis and biological activity of five-coordinate platinum(II) complexes including organotin fragments, *Anti-Cancer Drug Design* in press.
- [6] K.M. Mackay and B.K. Nicholson (1982) Compounds with bonds between a transition metal and either silicon, germanium, tin or lead, *Comprehensive Organometallic Chemistry*, Pergamon Press, New York **6**, 1043-1114.
- [7] M.S. Holt, W.L. Wilson and J.H. Nelson (1989) Transition metal-tin chemistry, *Chem. Rev.* **89**, 11-49.
- [8] V.G. Kumar Das and C. Chu (1985) Carbon-carbon bond formation using tin and lead organometallics, *The Chemistry of the Metal-Carbon Bond*, J. Wiley and S., London **3**, 1-97.
- [9] R.C. Larock (1978) Organomercury compounds in organic synthesis, *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* **17**, 27-37.
- [10] V.G. Albano, G. Natile and A. Panunzi (1994) Five-coordinate alkene complexes of palladium(II) and platinum(II), *Coord. Chem. Rev.* **133**, 67-114.
- [11] V.G. Albano, C. Castellari, V. De Felice, A. Panunzi and F. Ruffo (1992) Synthesis and characterization of five-coordinate platinum(II) complexes [Pt(2,9-dimethyl-1,10-phenanthroline)-(SnR_nX_{3-n})X(olefin)] (X= Cl or Br; R= Ph or Me). Molecular

- structure of [Pt(2,9-dimethyl-1,10-phenanthroline)(SnPh₂Cl)-Cl(ethylene)], *J. Organomet. Chem.* **425**, 177-188.
- [12] M.E. Cucciolito, V. De Felice, F. Giordano, A. Panunzi and F. Ruffo (1993) Trigonal-bipyramidal co-ordinatively saturated platinum(II) olefin complexes bearing an organomercury fragment in axial position, *J. Chem. Soc. Dalton Trans.*, 3421-3426.
- [13] I. Schwager and J.F. Knifton (1976) Homogeneous olefin hydroformylation catalyzed by ligand stabilized platinum(II)-group IVB metal halide complexes, *J. Catal.* **45**, 256-267.
- [14] C.A. Ghilardi, S. Midollini, S. Moneti, S. Orlandini, G. Scapacci and D. Dakternieks (1989) Five-co-ordinate methylmercury and trimethyltin palladium and platinum complexes. X-ray crystal structure of [N(CH₂CH₂PPh₂)₃Pt(HgMe)]BPh₄, *J. Chem. Soc. Chem. Commun.* 1686-1689.
- [15] M. Kretschmer, P.S. Pregosin and H. Ruegger (1983) Synthesis, ¹¹⁹Sn, ¹³C and ¹⁹⁵Pt NMR studies of five-coordinate rhodium(I), iridium(I) and platinum(II) complexes containing three trichlorostannate ligands, *J. Organomet. Chem.* **241**, 87-98.
- [16] A. Albinati, P.S. Pregosin and H. Ruegger (1984) Trichlorostannate complexes of platinum. Synthesis, multinuclear NMR spectroscopy and X-ray crystallography of trans-[Pt(SnCl₃)₂(P(OPh)₃)₂] and related complexes, *Inorg. Chem.* **23**, 3223-3229.
- [17] P.S. Pregosin and H. Ruegger (1984) ¹¹⁹Sn and ¹⁹⁵Pt NMR spectroscopy of SnCl₃⁻ complexes of platinum and palladium. Some chemistry of the complexes (Ph₄P)₂[PtCl₄] and [Pt(μ-Cl)-Cl(PEt₃)₂]₂ with SnCl₂, *Inorg. Chim. Acta* **86**, 55-60.
- [18] C. Eaborn, A. Pidcock and B.R. Steele (1976) Oxidative addition of triorganotin halides to platinum(0) complexes, *J. Chem. Soc. Dalton Trans.* 767-776.

- [19] T.A.K. Al-Allaf, G. Butler, C. Eaborn and A. Pidcock (1980) Organoplumbio complexes of platinum(II), *J. Organomet. Chem.* **188**, 335-343.
- [20] V.I. Sokolov, V.V. Bashilov and O.A. Reutov (1975) Reaction of low-valent transition metal complexes with non-transition organometallic compounds, *J. Organomet. Chem.* **97**, 299-306.
- [21] V.I. Sokolov, V.V. Bashilov, L.M. Anishchenko and O.A. Reutov (1974) The reaction between organomercurials and platinum(0) phosphine complexes: a new versatile synthesis of σ -bonded organoplatinum(II) compounds, *J. Organomet. Chem.* **71**, C41-42.
- [22] M. Crespo, O. Rossell, J. Sales and M. Seco (1984) Demercuration reactions of the complexes $[(PPh_3)_2RPt-HgR']$ containing platinum-mercury bonds, *J. Organomet. Chem.* **273**, 415-421.
- [23] F. Glockling and K.A. Hooton (1962) Triphenylgermyl complexes of copper, silver and gold, *J. Chem. Soc.* 2658-2661.
- [24] H. Yamashita, T. Kobayashi, M. Tanaka, J.A. Samuels and W.E. Streib (1992) Oxidative addition of germanium-germanium and germanium-chlorine bonds to $Pt(PEt_3)_3$ and unexpected germylene generation from the resulting bis(chlorogermyl) platinum complex, *Organometallics* **11**, 2330-2333.
- [25] V. De Felice, A. De Renzi, F. Ruffo and D. Tesauro (1994) Three-coordinate $Pt(0)$ η^2 -complexes: electrophilic hydrogen attack through oxidative-addition of protic acids, *Inorg. Chim. Acta* **219**, 169-178.
- [26] V.G. Albano, C. Castellari, M.L. Ferrara, A. Panunzi and F. Ruffo (1994) Five-coordinate hydrido-complexes $[PtX(H)(N,N\text{-chelate})]$ ($X = Cl, Br$ or I). Crystal structure of $[PtCl(H)(2,9\text{-Me}_2\text{-1,10\text{-phenanthroline})(dimethylmaleate)]$, *J. Organomet. Chem.* **469**, 237-244.

- [27] V. De Felice, A. Panunzi, F. Ruffo and B. Åkermark (1992) Addition-elimination equilibrium between three-coordinate Pt(0) and five-coordinate Pt(II) species, *Acta Chem. Scand.* **46**, 499-500.
- [28] O. Rossell, M. Seco and I. Torra (1986) Synthesis of heterotrimetallic complexes containing M-Hg-Pt (M= Pt, Fe, Mn or Co) arrays, *J. Chem. Soc. Dalton Trans.* 1011-1014.
- [29] F.P. Fanizzi, F.P. Intini, L. Maresca, G. Natile, M. Lanfranchi and A. Tiripicchio (1991) Four- versus five-co-ordination in palladium(II) and platinum(II) complexes containing 2,9-dimethyl-1,10-phenanthroline (dmphen). Crystal structure of [PtCl₂(dmphen)] and [Pt(η²-C₂H₄)Cl₂(dmphen)], *J. Chem. Soc. Dalton Trans.* 1007-1015.
- [30] V.G. Albano, D. Braga, V. De Felice, A. Panunzi and A. Vitagliano (1987) Five-coordinate complexes of platinum(II) containing σ-bonded carbon ligands. Synthesis and characterization of [PtClMe(η²-C₂H₄)(N-N')] complexes. Molecular structure of an adduct with a chiral metal center and of its parent four-coordinate complex, *Organometallics* **6**, 517-525.
- ¹ Dipartimento di Chimica, Università di Napoli "Federico II", via Mezzocannone 4, I-80134, Italy
- ² Facoltà di Agraria, Università del Molise, via Tiberio 21/A, I-86100, Campobasso, Italy.

OSSERVAZIONI GEOMORFOLOGICHE SULLA MEDIA-BASSA VALLE DEL FIUME CALORE (BENEVENTO) *

Nota di **Silvio Di Nocera, Fabio Matano e Laura De Palma**
Presentata dal Socio **Tullio Pescatore**

Adunanza del 4-3-1995

RIASSUNTO - E' stata condotta un'analisi morfologica della zona posta fra i massicci carbonatici del Matese a N-W e del Camposauro a S, che comprende approssimativamente la medio-bassa valle del fiume Calore. La valle è di natura strutturale e si presenta morfologicamente asimmetrica, con l'asse vallivo spostato verso sud. Il ripido versante in sinistra orografica è bordato da un'ampia fascia detritica pedemontana carsificata. Il versante in destra orografica è caratterizzato da cinque ordini di terrazzi alluvionali, individuatisi a partire dal Pleistocene medio; il terrazzo di primo ordine si raccorda con un glacis di erosione. Su tale versante sono stati anche studiati i rapporti tra le condizioni stratigrafico-strutturali, l'approfondimento del reticolo idrografico ed i fenomeni di instabilità. L'indagine ha consentito di tracciare un quadro dell'evoluzione morfo-strutturale della valle nel corso del Quaternario.

ABSTRACT - The authors describe the results of a geomorphological research about the sector of Calore River valley located between Matese and Camposauro carbonate massifs. The valley has a tectonic nature and is morphologically asymmetrical, with the axis shifted toward south. The left slope is steep and is bordered by a debris talus with karst phenomena. The right slope presents five orders of alluvional terraces of Middle Pleistocene to Holocene age. The first order terrace gradually join with a pediment. The relationships among stratigraphic-structural conditions, hydrography deepening and instability phenomena are discussed with reference to the slope developing from Calore River to Mt. Croce. The investigation allowed to draw a framework of the morpo-structural evolution of the valley during the Quaternary.

PAROLE CHIAVE - Morfologia, Evoluzione morfo-strutturale, Stabilità dei Versanti, Quaternario, Fiume Calore, Benevento, Italia meridionale.

KEY WORDS - Morphology, Morpo-structural Evolution, Slope Stability, Quaternary, Calore River, Benevento, Southern Italy.

* *Lavoro eseguito su fondi C.N.R.-G.N.D.C.I., contratto n° 93.03003.PF42
Pubblicazione n° 1278 della collana del G.N.D.C.I.*

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito delle attività del G.N.D.C.I. - Linea 2, si sta svolgendo una ricerca volta agli aspetti geologici e morfologici ed all'analisi della franosità del territorio della provincia di Benevento (PELLEGRINO & PESCATORE, 1994). La ricerca prevede, tra l'altro, un approfondimento della geologia e della morfologia di alcuni settori rappresentativi delle condizioni stratigrafico-strutturali e morfologiche del Sannio. Relativamente al settore sud-occidentale dell'Appennino sannita, compreso tra il M. Camposauro ed i rilievi di M. Croce e M. Coppe, a sud-est del massiccio del Matese (fig.1), si sono svolti, in una prima fase, uno studio geologico, i cui risultati sono riportati in DI NOCERA *et alii* (1993) e successivamente un'indagine geomorfologica, i cui risultati sono illustrati nella presente nota.

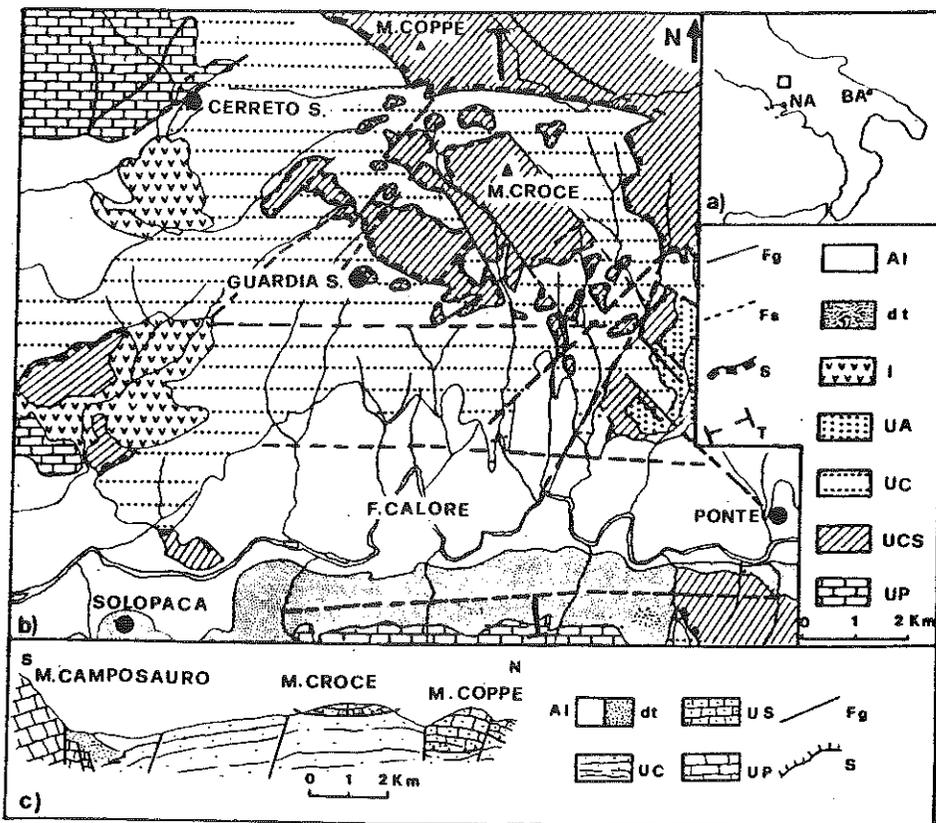


Fig. 1 - a) Ubicazione dell'area studiata; b) Carta geologica; c) Sezione geologica schematica (modif. da DI NOCERA *et alii*, 1993). LEGENDA: Al, alluvioni attuali, travertino ed alluvioni terrazzate (Pleistocene medio - Attuale); dt, detrito di falda e depositi di conoide torrentizia (Pleistocene); I, Ignimbrite Campana (Pleistocene superiore); UA, Unità di Altavilla (Messiniano- Pliocene inferiore); UC, Unità delle Arenarie di Caiazzo (Tortoniano-Messiniano inferiore); UCS, Unità della Coltre Sammitica (Oligocene- Langhiano); UP, Unità carbonatica della Piattaforma Laziale- Abruzzese- Campana (Cretacico); Fg, faglia; Fs, faglia sepolta; S, sovrascorrimento; T, traccia della sezione.

L'indagine morfologica ha consentito di tracciare un primo quadro dell'evoluzione morfo-strutturale della valle del fiume Calore nel corso del Quaternario. Inoltre, relativamente al versante in destra del fiume, si sono indagate le connessioni tra condizioni stratigrafico-strutturali, evoluzione morfologica e processi di instabilità.

2. LINEAMENTI GEOLOGICO-STRUTTURALI

Il fiume Calore, nel tratto in esame, scorre in un'ampia valle strutturale (fig.1), delimitata da faglie dirette con componente di trascorrenza sinistra ad andamento E-W (D'ARGENIO, 1967; ORTOLANI *et alii*, 1994). Numerose altre faglie con andamenti NW-SE e NE-SW hanno dislocato e smembrato le varie serie affioranti, descritte in PESCATORE (1961), D'ARGENIO (1961, 1967) e DI NOCERA *et alii* (1993).

Le formazioni carbonatiche mesozoiche costituiscono l'ossatura del M. Camposauro e del Monte Cigno. L'*Unità delle Arenarie di Caiazzo* (DI NOCERA *et alii*, 1993), largamente affiorante in destra del fiume Calore, è costituita da terreni di natura argilloso-arenacea e calcareo-marnosa, estremamente tettonizzati. Tale successione è troncata a tetto da una falda di ricoprimento, la *Coltre Sannitica* (SELLI, 1962), costituita prevalentemente da termini calcareo-clastici e calcareo-marnoso-argillosi, riferibili alla *Formazione del Flysch Rosso* di età Oligocene-Miocene inferiore; la superficie di sovrascorrimento risulta marcata da un livello discontinuo di argilliti rossastre e grigiastre di esiguo spessore, appartenenti alla medesima formazione. La coltre si presenta in lembi discontinui (fig.1b), di spessore talora limitato a poche decine di metri, in cui la frazione lapidea è di regola intensamente fratturata.

In discordanza sui terreni descritti poggia l'*Unità di Altavilla* (D'ARGENIO *et alii*, 1973), formata da calcareniti, arenarie poco cementate, argille e sabbie argillose. Nell'area affiorano, inoltre, depositi quaternari costituiti da lembi di travertino ed ignimbrite e da potenti accumuli di depositi clastici di versante e di alluvioni terrazzate.

3. MORFOLOGIA

L'articolata morfologia dell'area in esame è dominata dall'ampia vallata in cui scorre il fiume Calore, che si presenta nell'insieme marcatamente asimmetrica con l'asse vallivo spostato verso sud (fig. 1c). In particolare il versante in sinistra è caratterizzato da una pendenza media di circa 35°, mentre il versante opposto ha una pendenza media più blanda (circa 10°).

Il corso del fiume Calore si sviluppa con un tracciato a meandri irregolari fino all'altezza della stazione ferroviaria di Solopaca, ove si rinviene una stretta morfologica, oggi in gran parte erosa, a valle della quale il tracciato fluviale assume un andamento quasi rettilineo (fig.2). La presenza della stretta ha creato

condizioni di rallentamento della corrente fluviale, con sovralluvionamento e formazione di meandri ad ampio raggio a monte.

Il reticolo idrografico affluente in destra del fiume Calore si presenta ben articolato con un pattern subangolato; si riconoscono, infatti, numerose aste orientate secondo le direzioni NW-SE e NE-SW e confluenze ad angolo retto, legate ad un controllo di natura tettonica. In sinistra orografica si osservano numerose brevi incisioni che decorrono preferenzialmente lungo una direzione N-S, secondo la linea di massima pendenza del versante, e si immettono con una confluenza ad angolo retto nel corso principale. La rete drenante ovunque è in rapido approfondimento.

In sinistra del fiume Calore, il massiccio carbonatico del Camposauro è delimitato da ripidi versanti strutturali, legati a faglie subverticali con notevoli rigetti di età presumibilmente plio-pleistocenica, alla cui base si riconosce una estesa e continua falda detritica pedemontana, che comprende numerose conoidi torrentizie carsificate.

Il versante in destra del Calore si imposta su una successione mista di terreni, costituita alla base da argille, siltiti ed arenarie delle *Arenarie di Caiazzo* ed a tetto dalla successione calcarea del *Flysch Rosso*, sovrapposta tettonicamente alla prima. I termini lapidei della coltre si presentano intensamente tettonizzati. Sul versante (fig.2) si individuano schematicamente tre settori ben definiti: a) settore superiore dei crinali e delle scarpate di faglia evolute in rocce lapidee, b) settore intermedio del glacis, c) settore inferiore dei terrazzi alluvionali.

Il settore superiore si sviluppa oltre i 500 m di quota a monte del glacis, dal quale è separato da una brusca rottura di pendenza (fig.3 a-b). In esso sono presenti i principali rilievi dell'area, quale ad esempio M. Croce, che sono costituiti da termini calcareo-marnosi della *Coltre Sannitica*, e sono delimitati da versanti di faglia evoluti, molto inclinati ed orientati NW-SE e NE-SW. In tale settore si riconoscono *trench* e prismi rocciosi calcarei di volume valutabile intorno a 10^5 - 10^6 mc; tali blocchi rocciosi si presentano ribassati e ruotati, e raggruppati in ammassi caotici o talora isolati (fig.2). Alla base dei versanti è presente una falda detritica che ricopre in parte i blocchi calcarei ed i *trench* (fig.3 a-b).

Ai piedi dei crinali calcarei, nel settore intermedio del versante, sono presenti numerosi lembi relitti di un glacis debolmente inclinato di 4 - 10° verso sud, compresi tra +150 m e +450 m s.l.m.; la superficie originaria del glacis è resa discontinua per l'incisione dei numerosi impluvi che solcano il versante (fig.2).



Fig.2 - Carta morfologica.

LEGENDA: 1, reticolo idrografico; 2, conoide torrentizia; 3, crinale; 4, glacis; 5, terrazzo inciso nell'Ignimbrite campana; 6, superficie dei terrazzi alluvionali; 7, orlo del terrazzo di I ordine; 8, orlo del terrazzo di II ordine; 9, orlo del terrazzo di III ordine; 10, orlo del terrazzo di IV ordine; 11, orlo del terrazzo di V ordine; 12, area di intensa erosione; 13, dosso calcareo; 14, area interessata da fenomeni di D.G.P.V.; 15, trench; 16, scarpata; 17, frana di dimensioni non cartografabili; 18, nicchia e corpo di frana.

Il glacis si imposta principalmente sulle rocce tenere delle *Arenarie di Caiazzo* e nella porzione più alta del versante sui termini della *Coltre Sannitica* fratturati e coinvolti dai fenomeni gravitativi. A più altezze sul versante, lungo i crinali secondari, si riconosce un deposito detritico connesso al glacis, costituito da clasti di natura prevalentemente calcarea, a spigoli vivi o subangolari, e del diametro variabile da alcuni centimetri al metro, immersi in una matrice sabbioso-pelitica di colore bruno. Nel deposito si ritrovano locali concentrazioni di massi e blocchi calcarei, intensamente fratturati. Il deposito complessivamente presenta uno spessore di pochi metri che tende ad aumentare in corrispondenza dei paleoalvei, comunque non superando i 10 metri.

Nella parte alta del versante la continuità del glacis è interrotta da numerosi dossi (fig.2), costituiti da blocchi calcarei, estremamente fratturati, distaccatisi dai versanti sovrastanti e "scivolati" verso valle; i dossi sono circondati dalla superficie del glacis e parzialmente sepolti da essa (fig.3 a-b). I blocchi di maggiore dimensione sono da mettere in relazione a processi gravitativi profondi del tipo *lateral spreading*.

Nella parte bassa del versante il glacis si raccorda gradualmente con un fondovalle a + 130-150 m rispetto all'attuale, in corrispondenza del terrazzo di I ordine (fig.3c), di cui si ritiene sia coevo. Il glacis si sarebbe formato sotto le condizioni climatiche di tipo freddo-secco che ciclicamente si sono realizzate durante il Riss ed il Wurm, con processi di dilavamento areale nella porzione impostata sulle *Arenarie di Caiazzo*. Nel settore di raccordo con le parti alte, ove sono presenti ridotti spessori dei calcari, il glacis ha interessato solo le porzioni ribassate dai fenomeni gravitativi profondi e colmate da detrito, fossilizzando i *trench*.

Il versante occidentale di Monte Coppe, nel settore compreso tra Montalto e Ripe del Corvo, è interessato da spettacolari fenomeni di Deformazione Gravitativa Profonda di Versante; gli accumuli di tali fenomeni, presso il paese di Cerreto Sannita, sono in parte fossilizzati dall'*Ignimbrite campana* (CORNIELLO, 1987; ORTOLANI *et alii*, 1991). Il versante si presenta nel suo settore intermedio modellato secondo una paleosuperficie inclinata debolmente verso W-SW, incisa dal reticolo idrografico e probabilmente ricollegabile al glacis che si sviluppa più ampiamente sul versante meridionale del monte. Altri lembi di paleosuperfici spianate, anche esse riferibili al glacis, sono presenti a nord e a sud di Castelvenere (fig.2).

Nel settore inferiore si riconoscono cospicui accumuli di depositi alluvionali terrazzati. I depositi hanno spessori superiori a 150 m e sono costituiti da ghiaie poco cementate con clasti di natura calcarea ed arenacea e con intercalati livelli di ceneri vulcaniche e piroclastiti rimaneggiate. Si individuano almeno cinque ordini di terrazzi alluvionali, con le seguenti quote sul letto del fiume Calore: I) + 90 -120 m, II) + 30-40 m, III) + 15-20 m, IV) + 10-12 m, V) + 5-6 m (figg.2 e 3c).

Il terrazzo di I ordine si presenta ridotto ad alcuni lembi allungati in senso N-S, in quanto disseccato dalle numerose incisioni dei torrenti affluenti il fiume Calore. Le quote massime raggiunte dalle alluvioni del terrazzo del primo ordine

sono comprese tra 200-220 m s.l.m.; l'età di tali depositi è ritenuta Riss (MALATESTA, 1958; BERGOMI *et alii*, 1975).

Il terrazzo di II ordine raggiunge quote massime di + 90-100 m s.l.m.; presso Telesè i suoi depositi sono ricoperti da una placca travertinosa. Sia i travertini che i depositi costituenti il terrazzo sono fossilizzati dall'*Ignimbrite campana* (AIELLO *et alii*, 1988), pertanto il terrazzo di II ordine ha un'età non più recente di 33.000 anni B.P. (Interstadiale Wurm 1/ Wurm 2).

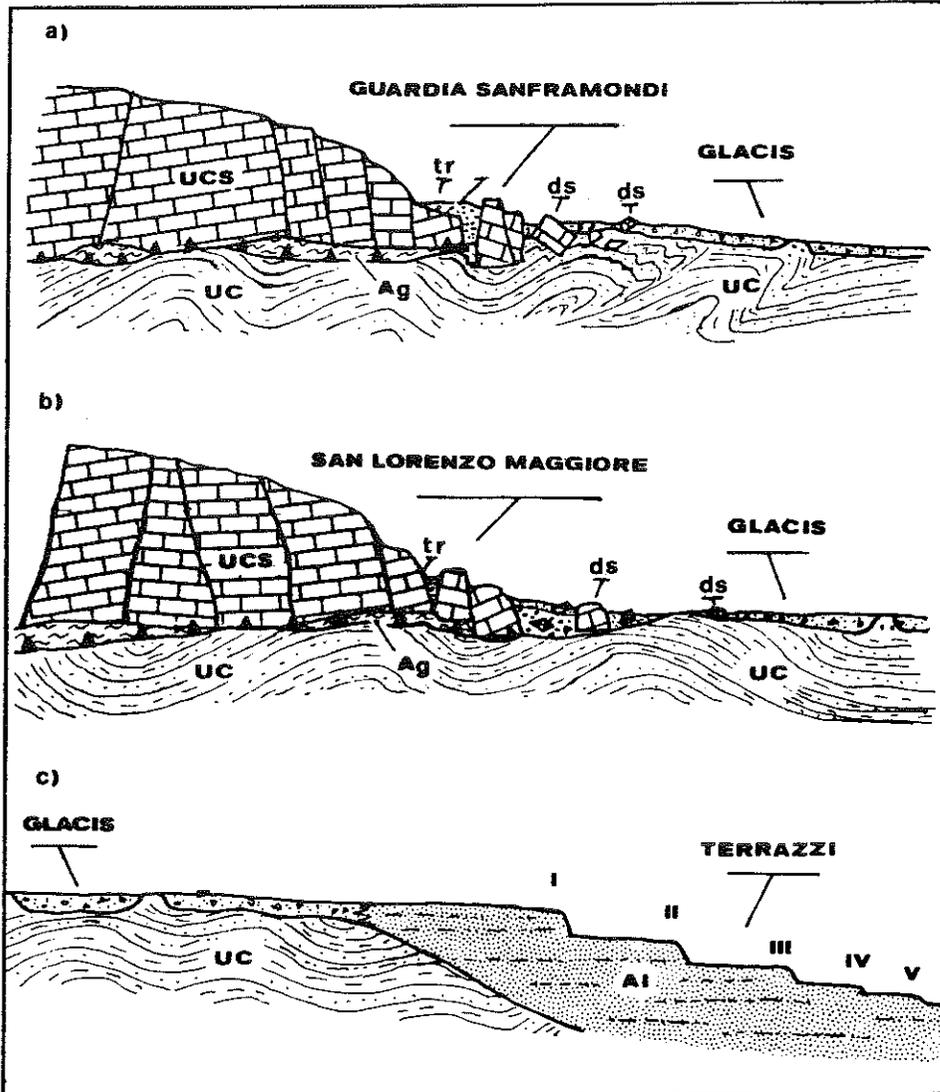


Fig.3 - Sezioni geomorfologiche schematiche: a) settore di Guardia Sanframondi; b) settore di San Lorenzo; c) settore inferiore del versante.
LEGENDA: Ag, argilliti rossastre del *Flysch Rosso*; UCS, calciruditi e calcareniti del *Flysch Rosso*; UC, argille ed arenarie dell'*Unità di Caiazzo*; AI, alluvioni terrazzate; dt, detrito; ds, dossi calcarei; tr, trench.

Il terrazzo di III ordine si rinviene anche in sinistra orografica, ove ai depositi alluvionali sono intercalati limi lacustri e palustri. L'età del terrazzo è stata assegnata genericamente al Wurm da MALATESTA (1958) ed al Wurm 2 oppure dell'Interstadiale Wurm 2/ Wurm 3 da BERGOMI *et alii* (1975).

I terrazzi inferiori di IV e V ordine sono continui lungo il fiume Calore e poco incisi dai suoi tributari. Essi sono legati ad incisioni molto recenti avvenute tra il Wurm 3 e l'Olocene.

4. ALCUNI ASPETTI DEI FENOMENI DI INSTABILITA'

Le condizioni geologiche e strutturali influenzano in modo determinante i fenomeni di instabilità che interessano l'area di studio. In particolare nel versante in destra del fiume Calore, la sovrapposizione di natura tettonica secondo una superficie di contatto suborizzontale di terreni a comportamento fragile (*Coltre Sannitica*) su terreni a comportamento duttile (*Arenarie di Caiazzo*) ha comportato uno stato di diffusa e generalizzata instabilità alla scala dell'intero versante.

La tipologia morfostrutturale riconosciuta rientra nella schematizzazione "Tipo I Ab" proposta da GUIDA *et alii* (1988) per le condizioni favorevoli allo sviluppo di Deformazioni Gravitative Profonde di Versante (D.G.P.V.) nella regione campano-lucana. A tale situazione sono, probabilmente, riconducibili gli evidenti fenomeni di D.G.P.V. presenti sul versante occidentale di Monte Coppe, a nord-est di Cerreto Sannita. Anche nel settore tra gli abitati di Guardia Sanframondi e San Lupo si rinvencono *trench* ed ingenti masse calcaree ribassate e variamente fratturate, probabilmente legate a movimenti gravitativi profondi. Si ritiene che i fenomeni in parola si siano sviluppati almeno a partire dal Pleistocene medio, in quanto risultano in parte fossilizzati dal glacis e dall'*Ignimbrite Campana*.

Le condizioni di generalizzata instabilità alla scala del versante e l'intenso recente approfondimento del reticolo idrografico hanno favorito una diffusa franosità a media e piccola scala su tutto il versante in destra del fiume Calore. I fenomeni franosi appaiono infatti diffusi in corrispondenza delle incisioni torrentizie sia nel settore superiore del versante, al passaggio tra il glacis ed i versanti in rocce calcaree, che nel settore inferiore.

Nel settore superiore, in corrispondenza degli abitati di Guardia Sanframondi e San Lorenzo Maggiore, ove la placca calcarea si presenta più potente e relativamente meno fratturata, si individuano ampi scorrimenti rotazionali. Tali fenomeni, quando interessano anche le sottostanti alternanze pelitico-arenacee, evolvono a colata; nell'insieme queste frane complesse si presentano quiescenti. Nel settore ad est di Monte Croce, le condizioni di maggiore fratturazione della placca calcarea hanno favorito l'approfondimento del reticolo idrografico, fino a far affiorare i livelli delle sottostanti argilliti varicolori, creando le condizioni per una diffusa erosione e franosità ancora in atto (figg.2 e 3 a-b).

Nei settori mediano ed inferiore del versante gli impluvi hanno inciso le superfici del glacis e dei terrazzi alluvionali di ordine minore, generando profondi valloni, caratterizzati da scarpate subverticali alte fino a cinquanta metri. Lungo tali valloni sono riconoscibili numerose frane di limitata estensione e morfologicamente poco evolute con meccanismi di scorrimento rotazionale, crollo o colata, in dipendenza delle litologie interessate.

5. CONSIDERAZIONI SULL' EVOLUZIONE MORFO-STRUTTURALE DELLA VALLE E CONCLUSIONI

L'indagine geomorfologica e l'analisi delle coperture quaternarie hanno permesso di individuare le principali forme ed i processi agenti sul territorio e di ricostruire le principali tappe evolutive della valle nel corso del Quaternario.

L'evoluzione della valle del fiume Calore è stata condizionata da numerosi eventi tettonici e climatici. Le attuali morfosttrutture, probabilmente individuatesi già con la fase tettonica del Pleistocene inferiore, si sono meglio definite con la fase tettonica fine-infrapleistocenica, datata 0.75 my B.P. (APRILE *et alii*, 1980; BRANCACCIO & CINQUE, 1988); in tale periodo si origina un articolato graben che ha dato luogo alla formazione di una conca fluvio-lacustre.

Nel Pleistocene medio la concomitanza di condizioni climatiche fredde ha favorito l'erosione dei versanti strutturali che delimitavano il graben e l'accumulo di enormi volumi di masse clastiche. Ne sono testimonianza le "breccie arrossate antiche" del Mindel, affioranti lungo il versante settentrionale del M. Camposauro (BERGOMI *et alii*, 1975). Probabilmente in tale momento evolutivo sul versante di Guardia Sanframondi si sono innescati i profondi fenomeni franosi ed i fenomeni di D.G.P.V., osservabili sul versante occidentale di M. Croce.

Con la tettonica rissiana (0.3 my B.P.) si determina un sollevamento generalizzato di tutta l'area dell'ordine di un centinaio di metri. In tale fase lungo il tratto in esame del fiume Calore si attua un processo di sovralluvionamento legato alla presenza di una soglia morfologica localizzata subito ad est di Teles e Solopaca e probabilmente già individuatasi con la fase tettonica precedente.

Le alluvioni antiche del terrazzo di primo ordine, affioranti in destra del fiume Calore, documentano il riempimento della valle avvenuto durante il Riss, che ha raggiunto una superficie deposizionale di + 100-130 m sul talweg attuale. Nello stesso periodo più a monte sul versante si andava formando il glacis ed un graduale raccordo con la superficie deposizionale del terrazzo di primo ordine. Nel settore meridionale di M. Coppe il glacis in parte fossilizza i fenomeni di *lateral spreading*, già individuatasi almeno prima della fase rissiana.

Alla fase di sovralluvionamento è seguita una fase di incisione, che ha individuato le scarpate dell'orlo del terrazzo di I ordine. In sinistra del fiume l'evoluzione dei versanti di faglia in roccia carbonatica ha dato luogo alla formazione di una estesa falda detritica pedemontana. Non si hanno elementi sufficienti per stabilire se tali processi siano stati coevi o posteriori alla

formazione del glacis e del terrazzo di I ordine, anche se la presenza dei terrazzi di II e III ordine su entrambi i lati vallivi lascia propendere per la prima ipotesi.

Nel Pleistocene superiore, tra il Wurm 1 e l'interglaciale Wurm 1/ Wurm 2, si individua il terrazzo di II ordine, posto a + 30-40 m sul fondovalle attuale. Sui depositi ghiaiosi di tale terrazzo si imposta la placca di travertino di Amorosi e Telese, sulla quale si depono l'*Ignimbrite Campana* (AIELLO *et alii*, 1988). Si ritiene che tali eventi si siano realizzati nell'ambito del Wurm 2 e che ad essi siano forse collegate nuove brevi chiusure della valle con sviluppo di localizzate condizioni palustri e lacustri. Nel corso dell'interglaciale Wurm 2/ Wurm 3 si individua il terrazzo di III ordine

Durante il Wurm 3 ed i successivi Stadi Appenninici (PALMENTOLA *et alii*, 1990) si sono formati i terrazzi di IV e V ordine. Nel corso dell'Olocene la rete drenante si presenta nel suo insieme in erosione, innescando vari processi di instabilità ancora oggi attivi lungo i versanti.

La ricerca svolta ha infatti fornito utili indicazioni per lo studio dei processi di instabilità, particolarmente sviluppati in tale settore della provincia di Benevento e che saranno oggetto di successive indagini. In base ai risultati raggiunti è stato infatti possibile riconoscere che i principali fattori predisponenti che controllano i processi di instabilità, largamente diffusi sul versante in destra del fiume Calore, sono rappresentati dalla sovrapposizione di unità litostratigrafiche a comportamento fragile su unità litostratigrafiche a comportamento duttile e dalla profonda incisione operata dalla rete drenante.

RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia il prof. G. Iaccarino per la lettura critica del manoscritto.

Il presente lavoro è stato giudicato degno di pubblicazione da una commissione costituita da L. Brancaccio, B. D'Argenio e T.S. Pescatore.

BIBLIOGRAFIA

AIELLO G., D'ARGENIO B., FERRERI V. & VIOLANTE C. (1988) - *Ricerche sedimentologiche sui travertini di Telese e di Amorosi (Benevento)*. Università "Federico II", Dipartimenti di Geofisica e Vulcanologia, di Paleontologia, e di Scienze della Terra, Conferenza Scientifica Annuale sulle Attività di Ricerca dei Dipartimenti, Napoli Dicembre 1989, 3-4, De Frede Ed.

APRILE F., BRANCACCIO L., CINQUE A., DI NOCERA S., GUIDA M., IACCARINO G., LAMBIASE S., ORTOLANI F., PESCATORE T., SGROSSO I. & TORRE M. (1980) - *Dati preliminari sulla neotettonica dei Fogli 161 (Isernia), 171 (Gaeta), 173 (Benevento), 209 (Vallo della Lucania)*. Contributi preliminari alla realizzazione della Carta Neotettonica d'Italia. Pubblicazione del Progetto Finalizzato Geodinamica, 356, 249-272.

BERGOMI G., MANFREDINI M. & MARTELLI G. (1975) - *Note illustrative della carta geologica d'Italia alla scala 1:100.000, F.173 Benevento*. Servizio Geologico d'Italia, Roma.

BRANCACCIO L. & CINQUE A. (1988) - *Evoluzione geomorfologica dell'Appennino campano-lucano*. Memorie della Società Geologica Italiana, **41**, 83-86.

CORNIELLO A. (1987) - *Geologia e frane del bacino del torrente Titerno (Campania)*. Memorie della Società Geologica Italiana, **37**, 145-155.

D'ARGENIO B. (1961) - *Sul Miocene autoctono del M. Camposauro (gruppo del Taburno- BN)*. Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli, **70**, 77-99.

D'ARGENIO B. (1967) - *Geologia del gruppo Taburno-Camposauro (Appennino Campano)*. Atti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli, Sez.3, **6**, 35-218.

D'ARGENIO B., PESCATORE T. & SCANDONE P. (1973) - *Schema geologico dell'Appennino Meridionale (Campania e Lucania)*. Atti Acc. Naz. Lincei, Quad., **183**, 49-72.

DI NOCERA S., TORRE M. & VITI P. (1993) - *Le Arenarie di Caiazzo nell'evoluzione Tortoniano-Messiniana dell'Appennino Campano*. Atti Ticinensi di Scienze della Terra, Pavia, **36**, 165-182.

GUIDA D., GUIDA M., IACCARINO G., PERRONE V., SGROSSO I. & VALLARIO A. (1988) - *Tipologia e diffusione delle Deformazioni Gravitative Profonde di Versante nel settore meridionale dell'Appennino campano-lucano in relazione all'assetto stratigrafico-strutturale*. Memorie della Società Geologica Italiana, **41**, 889-896.

MALATESTA A. (1958) - *Note di geologia e morfologia sulla valle Caudina e sulla valle del fiume Calore*. Bollettino del Servizio Geologico d'Italia, **80**, 255-260.

ORTOLANI F., PAGLIUCA S., TOCCACELI R. (1991) - *Geologia, geomorfologia e tettonica attiva in aree significative della Campania interessate da instabilità degli abitati*. Atti del Convegno S.C.A.I., Portonovo (AN) maggio 1989, 205-212.

ORTOLANI F., PAGLIUCA S., SCHIATTARELLA M., CASACCIA G., MARSALA V. & VENUTI G. (1994) - *Tettonica attiva ed evoluzione morfostrutturale pleistocenica dell'area compresa tra la valle del F. Volturmo ed i Monti del Sannio (Appennino Meridionale)*. LXXVII Conv. Soc. Geol. It., Volume Riassunti, 227-228.

PALMENTOLA G., ACQUAFREDDA P. & FIORE S. (1990) - *A new correlation of the glacial moraines in the Southern Apennines, Italy*. Geomorphology, **3**, 1-8.

PELLEGRINO A. & PESCATORE T.(1994) - *Studio di frane tipiche nell'Italia meridionale*. Atti Conv. per il decennale della fondazione del G.N.D.C.I., Roma dicembre 1994. in stampa.

PESCATORE T.(1961) - *Una serie stratigrafica nel flysch a sud-est del Matese*. Bollettino della Società Geologica Italiana, **80**, 1-5.

SELLI R. (1962) - *Il Paleogene nel quadro della geologia dell'Italia centro-meridionale*. Memorie della Società Geologica Italiana, **3**, 737-789.

Silvio di Nocera*, Fabio Matano*^o & Laura de Palma*.

* Dipartimento di Scienze della Terra, Università degli Studi di Napoli "Federico II", Largo San Marcellino 10, Napoli.

^o Istituto Geomare Sud, C.N.R., Via A. Vespucci 9, Napoli.

ON HIT - AND - MISS TOPOLOGIES

Nota di : Giuseppe Di Maio e Ľubica Holá

Presentata dal Socio : Angelo Alvino

Adunanza del 1 aprile 1995

SOMMARIO. Si caratterizzano la prima contabilità delle topologie di Vietoris e di Fell mediante proprietà topologiche di X . Per uno spazio metrizzabile X dotato di un numero finito di punti isolati la prima numerabilità della topologia di Vietoris è equivalente alla compattezza di X . Inoltre, si stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti per la metrizzabilità delle ipertopologie hit-and-miss.

ABSTRACT. We characterize the first countability of the Vietoris topology and the Fell topology in terms of topological properties for X . Surprisingly, for a metrizable space X with a finite number of isolated points first countability of Vietoris topology is equivalent to compactness of X . Furthermore we find necessary and sufficient conditions for metrizability of hit-and-miss hyperspace topologies.

AMS SUBJECT CLASSIFICATION : 54 B20, 54 E 35, 54 A 20, 54 A 10, 54 E 45, 54 E 50, 54 E 65.

KEY WORDS: Hit-and-miss topology, proximal topology, Vietoris topology, Fell topology, ball topology, ball proximal topology, hemicompact space, metric space with nice closed balls.

1. INTRODUCTION

Let (X, τ) be a Hausdorff space and $CL(X)$ be the nonempty closed subsets of X . Following the papers [BT1, BT2] we will continue in the study of hit-and-miss hyperspace topologies, more precisely in the study of so called Δ -topologies and Δ -proximal topologies in metric spaces, where Δ is a fixed subfamily of $CL(X)$. Two of the most familiar hyperspace topologies, namely the Vietoris topology and the Fell topology, are the prototypes for hit-and-miss topologies.

The Vietoris topology [KT, Mi] was very thoroughly studied and it is very popular among topologists, but it is too strong for many applications. The Fell topology [KT, Fe, Po] is more applicable and it has many applications mainly to optimization [A, BK] and also to other fields. From other Δ -topologies, studied up to now, let us mention at least ball topology [BT1, BT2, DN, HL] and the bounded Vietoris topology [BL1, LP].

The Δ -proximal topologies are intensively studied only in the last years, when their applicability to convex analysis has been found. Let us mention at least the most studied Δ -proximal topologies up to now: the Mosco topology, the slice topology and the linear topology [Be2, Be4].

In a recent paper [Be3] Beer found a necessary and sufficient condition for the first countability of the Fell topology. We complete this result by the following condition: The Fell topology is first countable if and only if X is first countable, every closed set is separable and every open set is hemicompact. This result can be deduced from our more general theorem for Δ -topologies and Δ -proximal topologies. This theorem gives us also a necessary and sufficient condition for the first countability of the Vietoris topology. The Vietoris topology on $CL(X)$ is first countable if and only if every closed set is separable and has a countable base of neighbourhoods. The separation axioms, the regularity and the complete regularity of Δ -topologies and Δ -proximal topologies were studied in [BT2]. Here also sufficient conditions for metrizability of Δ -topologies and Δ -proximal topologies can be found. In our paper we complete this result by proving that these conditions are also necessary.

Many characterizations of metric spaces with nice closed balls are known in the literature [Be1, CLZ]. We add two further characterizations by taking infima in the class of ball topologies and infima in the class of ball proximal topologies paralleling the result in [CLZ].

2. NOTATION AND TERMINOLOGY

In the sequel (X, τ) will be a topological space and (X, d) a metric space. In a metric space (X, d) an open (resp. closed) ball with center x and radius r will be denoted by $S_d(x, r)$ ($B_d(x, r)$ respectively). The distance of x from a (closed) set A is defined as $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. The open (resp. closed) ε -enlargement of A is the set $S_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ ($B_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ respectively). We shall write $S(x, r)$ ($B(x, r)$) for open (closed) ball and $S(A, \varepsilon)$ ($B(A, \varepsilon)$) for ε -enlargement when the context does not force us to specify the distance d .

The family of all closed proper balls (i.e. $\neq X$) will be denoted by $\mathfrak{B}(d)$ or \mathfrak{B} .

Given two sets A and B the gap between them is defined as $D_d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

If (X, τ) is a topological space, $CL(X)$ and $K(X)$ are the nonempty closed and compact subsets respectively.

To describe hypertopologies the following notations will be useful. If $E \subset X$ put $E^- = \{A \in CL(X) : A \cap E \neq \emptyset\}$, $E^+ = \{A \in CL(X) : A \subset E\} = \{A \in CL(X) : A \cap E^c = \emptyset\}$, where E^c denotes the complement of E .

In a metric space (X, d) set $E^{++} = \{A \in CL(X) : \text{for some } \varepsilon > 0 S(A, \varepsilon) \subset E\} = \{A \in CL(X) : D_d(A, E^c) > 0\}$.

In what follows we will work with the so called hit-and-miss topologies [BT1].

If (X, τ) is a topological space and Δ is a nonempty subfamily of $CL(X)$ then the Δ -topology τ_Δ^+ will be the topology having as a subbase all sets of the form V^- , where V is open, plus all sets of the form $(B^c)^+$, where $B \in \Delta$, as studied in abstract by Poppe [Po]. If $\Delta = CL(X)$ we obtain the familiar Vietoris topology τ_V , in Hausdorff spaces if Δ

= $K(X)$ the Fell topology τ_F and in metric space if $\Delta = \mathfrak{B}$ the ball topology [Be1], [HL], [DN].

If (X, d) is a metric space and Δ is a nonempty subfamily of $CL(X)$, then the Δ -proximal topology τ_{Δ}^{++} on $CL(X)$ has as a subbase all sets of the form V^- , where V is open, plus all sets of the form $(B^c)^{++}$, where $B \in \Delta$. Although proximal topologies perhaps were first explicitly noted by Nachman [Na] they were not intensively studied for a long time. But then they found their place, let us mention at least proximal topologies induced by families $\Delta = CL(X)$ and $\Delta =$ nonempty closed bounded sets as considered in [BLLN, BL1, BL2, SZ]; in normed linear space the proximal topology induced by $\Delta =$ nonempty closed and bounded convex subsets, called the slice topology [Be2]. Recently the ball proximal topology was studied [BT1, DN, HL], where $\Delta = \mathfrak{B}$.

If (X, τ) is a topological space and Δ is a nonempty subfamily of $CL(X)$ then by the "upper part" of τ_{Δ}^+ we mean the topology $u\text{-}\tau_{\Delta}^+$ on $CL(X)$ which has as a subbase the family $\{(B^c)^+ : B \in \Delta\} \cup \{CL(X)\}$.

If (X, d) is a metric space and Δ is a nonempty subfamily of $CL(X)$ then by the "upper part" of τ_{Δ}^{++} we mean the topology $u\text{-}\tau_{\Delta}^{++}$ on $CL(X)$ which has as a subbase the family $\{(B^c)^{++} : B \in \Delta\} \cup \{CL(X)\}$.

3. COMPARISON OF HYPERTOPOLOGIES

In this section we provide necessary and sufficient conditions for the coincidence of Δ -topologies. The main theorem of this part is very simple but offers a unified approach to this problem: it is possible to derive immediately as nice corollaries new and old results scattered in the literature.

We start with the following Lemma simple facts of which are repeatedly used in our paper.

Lemma 3.1 Let (X, τ) be a T_1 -topological space. Then for every $B_1, B_2, \dots, B_n \in CL(X)$ and every V_1, V_2, \dots, V_k nonempty open subsets in X we have:

- (1) $(B_1^c)^+ \cap (B_2^c)^+ = ((B_1 \cup B_2)^c)^+$;
- (2) $(B_1^c)^+ \subset (B_2^c)^+ \Leftrightarrow B_2 \subset B_1$;
- (3) $\emptyset \neq \bigcap \{V_i^- : i = 1, 2, \dots, k\} \cap \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\} \subset (B^c)^+ \Rightarrow B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\}$.

If (X, d) is a metric space, then the same results are valid by replacing $(+)$ by $(++)$.

Proof. Only the assertion (3) needs some comment. Suppose that there is $A \in CL(X)$ such that $A \in \bigcap \{V_i^- : i = 1, 2, \dots, k\} \cap \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\}$ and $\bigcap \{V_i^- : i = 1, 2, \dots, k\} \cap \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\} \subset (B^c)^+$. We claim that $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\}$. Suppose not. So there is a $b \in B \setminus \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\}$. Since (X, τ) is a T_1 -topological space, we have $A \cup \{b\} \in CL(X)$ and of course $A \cup \{b\} \in \bigcap \{V_i^- : i = 1, 2, \dots, k\} \cap \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\}$ but $A \cup \{b\} \notin (B^c)^+$, a contradiction.

Theorem 3.2. Let (X, τ) be a T_1 -topological space and Δ_1, Δ_2 be nonempty subclasses of $CL(X)$. Then the following are equivalent:

- (1) $\tau_{\Delta_1}^+ \subseteq \tau_{\Delta_2}^+$ on $CL(X)$;
- (2) $u\text{-}\tau_{\Delta_1}^+ \subseteq u\text{-}\tau_{\Delta_2}^+$ on $CL(X)$;
- (3) For every $B \in \Delta_1, B \neq X$, and every open set V with $B \subset V$ there are finitely many $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta_2$ such that $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset V$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) It is sufficient to prove that for every $B \in \Delta_1, (B^c)^+ \in u\text{-}\tau_{\Delta_2}^+, (B^c)^+ \in \tau_{\Delta_1}^+$, so $(B^c)^+ \in \tau_{\Delta_2}^+$. Let $A \in (B^c)^+$. So there is a $\tau_{\Delta_2}^+$ -neighbourhood of A , say $H, H = \bigcap \{V_i^- : i = 1, 2, \dots, k\} \cap \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\}$ (V_i open sets, $i = 1, 2, \dots, k, B_i \in \Delta_2, i = 1, \dots, n$) such that $A \in H$ and $H \subset (B^c)^+$. By Lemma 3.1 we have that $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\}$ and also that $((\bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\})^c)^+ \subset (B^c)^+$, so $A \in \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\} \subset (B^c)^+$.

(2) \Rightarrow (3) Let $B \in \Delta_1, B \neq X$ and V be an open set with $B \subset V$. Since $B \neq X$, we can take an open set U such that $B \subset U, U \neq X$ and $U \subset V$. Set $A = X \setminus U$. Then $A \in CL(X)$ and $A \in (B^c)^+, (B^c)^+ \in u\text{-}\tau_{\Delta_2}^+$ by the assumption. So there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta_2$

such that $A \in \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\} \subset (B^c)^+$. So by Lemma 3.1 we have $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\}$ and of course $\bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset X \setminus A \subset U$.

(3) \Rightarrow (1) To prove that $\tau_{\Delta_1}^+ \subseteq \tau_{\Delta_2}^+$ it is sufficient to prove that for every $B \in \Delta_1$, $(B^c)^+ \in \tau_{\Delta_2}^+$. If $B = X$, we are done. So suppose $B \neq X$. Let $A \in \text{CL}(X)$ such that $A \in (B^c)^+$. Then $B \subset X \setminus A$ and by the assumption (3) there are finitely many $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta_2$ such that $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset X \setminus A$. So $A \in \bigcap \{(B_i^c)^+ : i = 1, 2, \dots, n\} \subset (B^c)^+$, so $(B^c)^+ \in \tau_{\Delta_2}^+$.

From this Theorem we can see that whenever Δ_2 is a subfamily of $\text{CL}(X)$ such that Δ_2 contains every closed subset of finite unions of its members then $\tau_{\Delta_1}^+ \subseteq \tau_{\Delta_2}^+$ implies $\Delta_1 - \{X\} \subseteq \Delta_2$. It seems us that Theorem 3.2, in its simplicity, sheds more light on well known theorems that can be obtained immediately as its corollaries.

Corollary 3.3. Let (X, τ) be a Hausdorff topological space. The following are equivalent:

- (1) $\tau_F = \tau_V$ on $\text{CL}(X)$;
- (2) Every $B \in \text{CL}(X)$, $B \neq X$, is compact;
- (3) X is compact.

Let (X, d) be a metric space. Put $\Delta = \{A \in \text{CL}(X) : A \text{ is bounded}\}$. The topology τ_{Δ}^+ is called in the literature bounded Vietoris topology ([BL1, LP]). Denote this topology by τ_{bV} or $\tau_{bV}(d)$ if we need to specify the metric d .

Corollary 3.4. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) $\tau_F = \tau_{bV}$ on $\text{CL}(X)$;
- (2) Every bounded closed subset B , $B \neq X$, is compact;
- (3) X is boundedly compact.

Corollary 3.5. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) $\tau_V = \tau_{bV}$ on $\text{CL}(X)$;
- (2) Every $B \in \text{CL}(X)$, $B \neq X$, is bounded;

(3) X is bounded.

Corollary 3.6. ([HL]) Let (X, d) be a metric space and ρ a topologically equivalent metric. The following are equivalent:

- (1) $\tau_{\mathfrak{B}(d)}^+ \subseteq \tau_{\mathfrak{B}(\rho)}^+$;
- (2) For every $B \in \mathfrak{B}(d)$ and every open set V such that $B \subset V$, there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\rho)$ such that $B \subset \bigcup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset V$.

If (X, d) is a metric space denote by \mathfrak{D} the set of all admissible metrics. In our analysis the following Lemma plays a crucial role.

Lemma 3.7. Let (X, d) be a metric space and $B \in \text{CL}(X)$. The following are equivalent.

- (1) B is compact;
- (2) For any $\rho \in \mathfrak{D}$ B is ρ -bounded.

Proof. Only (2) \Rightarrow (1) requires a proof. Suppose that B is not compact. Then there exists in B a sequence $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ without cluster points. The set $L = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ is a closed set in X . The continuous function $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x_n) = n$ admits a continuous extension $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ by Dugundji Theorem. Set $\rho(x, y) = d(x, y) + |F(x) - F(y)|$ for $x, y \in X$. Of course the set B fails to be bounded in this admissible metric.

Corollary 3.8. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $\text{CL}(X)$. The following are equivalent:

- (1) $\tau_{\Delta}^+ \subseteq \tau_{\mathfrak{B}(\rho)}^+$ for every $\rho \in \mathfrak{D}$;
- (2) For every $B \in \Delta$, $B \neq X$, and every open set V , with $B \subset V$, and every $\rho \in \mathfrak{D}$, there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\rho)$ such that $B \subset \bigcup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset V$;
- (3) Every $B \in \Delta$, $B \neq X$, is compact.

The following corollary of our Theorem 3.2 gives us a new characterization of a space with nice closed balls (recall that a space has nice closed balls if each its proper closed ball is compact, see also [Be1, CLZ]).

Corollary 3.9. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) $\tau_{\mathcal{B}}(d)^+ \subseteq \tau_{\mathcal{B}}(\rho)^+$ for every $\rho \in \mathcal{D}$;
- (2) (X, d) is a space with nice closed balls.

Corollary 3.10. Let (X, d) be a metric space. Then the infimum of $\{\tau_{\mathcal{B}}(\rho)^+ : \rho \in \mathcal{D}\}$ in the class of τ_{Δ}^+ topologies is the Fell topology τ_F .

Proof. If τ_{Δ}^+ is a topology which is contained in every $\tau_{\mathcal{B}}(\rho)^+$, $\rho \in \mathcal{D}$, then by Corollary 3.8 every $B \in \Delta$, $B \neq X$, is compact.

Corollary 3.11. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. The following are equivalent:

- (1) $\tau_{\Delta}^+ \subseteq \tau_b \vee \rho$ for every $\rho \in \mathcal{D}$;
- (2) For every $B \in \Delta$, $B \neq X$, and every open set V , with $B \subset V$, and for every $\rho \in \mathcal{D}$, there are ρ -bounded closed sets B_1, B_2, \dots, B_n such that $B \subset \bigcup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset V$;
- (3) Every $B \in \Delta$, $B \neq X$, is compact.

Corollary 3.12. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) $\tau_b \vee d \subseteq \tau_b \vee \rho$, for every $\rho \in \mathcal{D}$;
- (2) Every d -bounded closed proper set is compact;
- (3) (X, d) is boundedly compact.

Corollary 3.13. Let (X, d) be a metric space. The infimum of $\{\tau_b \vee \rho : \rho \in \mathcal{D}\}$ in the class of τ_{Δ}^+ topologies is the Fell topology τ_F .

4. COMPARISON OF Δ -PROXIMAL TOPOLOGIES

In this section we will consider Δ -proximal topologies. So we will focus our attention on metric spaces.

Theorem 4.1. Let (X, d) be a metric space and Δ_1, Δ_2 be nonempty subclasses of $CL(X)$. Then the following are equivalent:

- (1) $\tau_{\Delta_1}^{++} \subseteq \tau_{\Delta_2}^{++}$ on $CL(X)$;

(2) $u-\tau_{\Delta 1}^{++} \subseteq u-\tau_{\Delta 2}^{++}$ on $CL(X)$;

(3) For every $B \in \Delta 1$, $B \neq X$, and for every $\varepsilon > 0$ there are finitely many $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta 2$ such that $B \subset \cup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset S(B, \varepsilon)$.

Proof. The proof is practically the same as the proof of Theorem 3.2 taking $A = \{x \in X : d(x, B) \geq \varepsilon\}$ instead of $A = X \setminus U$ in (2) \Rightarrow (3).

Corollary 4.2. Let (X, d) be a metric space, Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$ and $B \in CL(X) \setminus \{X\}$. The following are equivalent:

(1) $(B^c)^{++} \in \tau_{\Delta}^{++}$;

(2) For every $\varepsilon > 0$ there are finitely many $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$ such that $B \subset \cup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset S(B, \varepsilon)$.

Proof. Just take $\Delta 1 = \{B\}$ in Theorem 4.1.

Let (X, d) be a metric space. If $\rho \in \mathcal{D}$, then by $\tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$ we mean the proximal topology generated by the metric ρ and the family $\mathfrak{B}(\rho)$ (so $(++)$ is determined by ρ).

Denote further by \mathcal{U} the family of all metrics uniformly equivalent to d . Of course if $\rho \in \mathcal{U}$, then $\tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$ is just the proximal topology generated by the metric d and the family $\mathfrak{B}(\rho)$.

Theorem 4.3. Let (X, d) be a metric space.

(1) Let $B \in CL(X) \setminus \{X\}$. B is totally bounded $\Leftrightarrow (B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$ for every $\rho \in \mathcal{U}$.

(2) Let $B \in CL(X) \setminus \{X\}$. B is compact $\Leftrightarrow (B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$ for every $\rho \in \mathcal{D}$.

Proof. (1) Let $B \in CL(X) \setminus \{X\}$ be totally bounded. Let $\rho \in \mathcal{U}$. We verify the condition (2) from Corollary 4.2 for $\Delta = \mathfrak{B}(\rho)$. So let $\varepsilon > 0$. There is a $\delta > 0$ such that $B \subset S_{\rho}(B, \delta) \subset S_d(B, \varepsilon)$. ρ -total boundedness of B implies that there are finitely many $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(\rho)$ such that $B \subset \cup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset S_{\rho}(B, \delta)$. So $(B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$.

Now let $B \in CL(X) \setminus \{X\}$ and $(B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}}(\rho)^{++}$ for every $\rho \in \mathcal{U}$. Suppose that B is not totally bounded. So there are $\varepsilon > 0$ and an infinite subset $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ of

B such that $d(b_n, b_m) > 2\varepsilon$ if $n \neq m$. Set $d_\varepsilon(x, y) = \min\{d(x, y), \varepsilon\}$. Then d_ε is a metric uniformly equivalent to d . The assumption $(B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ and (2) of Corollary 4.2 imply that there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(d_\varepsilon)$ such that $B \subset \cup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset S_d(B, \eta)$, where $\eta > 0$ is such that $S_d(B, \eta) \neq X$. Let $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ be such that B_i contains infinitely many points of the set $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$. Consequently the d_ε -radius of B_i must be ε . So $B_i = X$, a contradiction.

(2) Let $B \in \text{CL}(X) \setminus \{X\}$. Suppose that B is compact. Then for every $\rho \in \mathfrak{D}$ we have $\{A \in \text{CL}(X) : D_\rho(A, B) > 0\} = \{A \in \text{CL}(X) : D_d(A, B) > 0\} = (B^c)^{++}$. Let $\rho \in \mathfrak{D}$. To prove that $(B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ it is sufficient to verify condition (2) in Corollary 4.2 for the space (X, ρ) . But this is clear since B is compact.

Now let $B \in \text{CL}(X) \setminus \{X\}$ be such that for every $\rho \in \mathfrak{D}$ $(B^c)^{++} \in \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$. Suppose that B is not compact. So there is a $\rho \in \mathfrak{D}$ such that B is not ρ -bounded. Let $x \in X \setminus B$. Then we can find a sequence $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ in B such that $\rho(x_n, x) \rightarrow \infty$. Put $B_n = \{x_n, x\}$ for every $n \in \mathbb{Z}^+$. Then $\{B_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ -converges to $\{x\}$. By the assumption $(B^c)^{++}$ is a $\tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ -neighbourhood of $\{x\}$. So there must exist $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ such that $B_n \in (B^c)^{++}$ for every $n \geq N_0$, a contradiction.

From this Theorem we can derive the following result which is the analogue to that established for the Wijsman topology in [CLZ].

Corollary 4.4. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) Every $B \in \mathfrak{B}(d)$ is totally bounded ;
- (2) $\tau_{\mathfrak{B}(d)^{++}} \subseteq \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ for every $\rho \in \mathfrak{U}$.

Denote further $\text{CLT}(X)$ the family of all nonempty totally bounded closed sets in X . Theorem 4.3 gives us also the following Corollary.

Corollary 4.5. Let (X, d) be a metric space. Then $\tau_{\text{CLT}(X)^{++}} \subseteq \tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}}$ for every $\rho \in \mathfrak{U}$ and $\tau_{\text{CLT}(X)^{++}}$ is even the infimum of $\{\tau_{\mathfrak{B}(\rho)^{++}} : \rho \in \mathfrak{U}\}$ in the class of τ_{Δ}^{++} topologies.

Now we show that the analogue of Corollary 4.4 does not hold for the ball topology.

Example 4.6. Let X be the following subset of \mathbb{R}^2 : $X = \{(0, 0)\} \cup \{(1/n, 1) : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(1/n, 1+1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ and d be the box metric induced by the euclidean metrics. It is easy to see that each proper d -ball is totally bounded. Put $B = B((0, 0), 1)$. Let $\epsilon_n, n \in \mathbb{Z}^+$, be such that $0 < \epsilon_n < 1/(n+1)$ and such that the set $V = \{(0, 0)\} \cup \{(1/n, 1), \epsilon_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ is an open subset which does not contain any point $(1/n, 1+1/n)$. Consider the metric $d_{1/2}(x, y) = \min \{d(x, y), 1/2\}$, $d_{1/2}$ is uniformly equivalent to d . We show that $\tau\mathfrak{B}(d)^+ \not\subseteq \tau\mathfrak{B}(d_{1/2})^+$ by Theorem 3.2. Suppose there are finitely many $d_{1/2}$ -balls $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}(d_{1/2})$ such that $B \subset \cup\{B_i : i = 1, \dots, n\} \subset V$. Then there exists $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that infinitely many points of the set $L = \{(1/n, 1) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ belongs to B_i . If the center of B_i is $(0, 0)$, then $B_i = X$. If the center of B_i is different from $(0, 0)$, then B_i contains also infinitely many points of the set $L' = \{(1/n, 1+1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ and $L' \not\subseteq V$. So in both cases, condition (3) of Theorem 3.2 does not occur.

The following Corollary of Theorem 4.3 justifies us to claim that we can find more similarities between the ball proximal topology and the Wijsman topology rather than the ball topology and Wijsman topology.

Corollary 4.7. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) Every $B \in \mathfrak{B}(d)$ is compact;
- (2) $\tau\mathfrak{B}(d)^{++} \subseteq \tau\mathfrak{B}(\rho)^{++}$ for every metric $\rho \in \mathfrak{D}$.

Corollary 4.8. Let (X, d) be a metric space. The Fell topology τ_F is the infimum of $\{\tau\mathfrak{B}(\rho)^{++} : \rho \in \mathfrak{D}\}$ in the class $\{\tau_\Delta(\rho)^{++} : \Delta \text{ a nonempty subfamily of } CL(X), \rho \in \mathfrak{D}\}$, where by $\tau_\Delta(\rho)^{++}$ we mean the proximal topology generated by the metric ρ and the family Δ (so $(++)$ is determined by ρ).

5. TOPOLOGICAL PROPERTIES OF Δ -PROXIMAL AND Δ -TOPOLOGIES.

Remark 5.1. Let (X, τ) be a T_1 -topological space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. Then τ_{Δ^+} is admissible; i.e. the assignment $x \rightarrow \{x\}$ is a topological embedding of X into $(CL(X), \tau_{\Delta^+})$.

Remark 5.2 Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. Then $\tau_{\Delta^{++}}$ is admissible ([BT2]).

Lemma 5.3. Let (X, τ) be a T_1 -topological space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. If $(CL(X), \tau_{\Delta^+})$ is first countable, then every $A \in CL(X)$ is separable.

Proof. Let $A \in CL(X)$. The first countability of $(CL(X), \tau_{\Delta^+})$ at A means that there is a countable family \mathcal{C} of sets of the form $\bigcap \{(B_i^c)^+ : i \in I\} \cap \bigcap \{S_j^- : j \in J\}$, I, J finite, (I possibly empty), $B_i \cap A = \emptyset$, $B_i \in \Delta$, $S_j \cap A \neq \emptyset$, S_j open, which is a base at A in τ_{Δ^+} (it is easy to verify that if A contains at least two different points then J must be nonempty). Put $\mathcal{A} = \{S : S \text{ open, } S \text{ occurs in the presentation of some element from } \mathcal{C}\}$. So \mathcal{A} is a countable family. Let $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ be an enumeration of elements from \mathcal{A} . For every $i \in \mathbb{Z}^+$ take $s_i \in S_i \cap A$. We claim that $\{s_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ is dense in A . Suppose not. There is a point $a \in A \setminus \overline{\{s_i : i \in \mathbb{Z}^+\}}$. Put $U = X \setminus \overline{\{s_i : i \in \mathbb{Z}^+\}}$. Then U^- is a τ_{Δ^+} -neighbourhood of A , so there is an element from \mathcal{C} , say $H = \bigcap \{(B_i^c)^+ : i \in I\} \cap \bigcap \{S_j^- : j \in J\} \subset U^-$. The set $L = \{s_j : j \in J\}$ (J finite) is a closed set and of course $L \in H$, but $L \notin U^-$, a contradiction.

Theorem 5.4. Let (X, τ) be a T_1 -topological space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta^+})$ is first countable;
- (2) X is first countable, every closed set A is separable and for every $A \in CL(X)$ there exists a countable family $\mathfrak{A}_A \subset \{C \in \Delta : C \cap A = \emptyset\}$ such that for every $B \in \Delta$ with $B \cap A = \emptyset$ there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{A}_A$ with $B \subset \bigcup \{B_i : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Proof. (1) \Rightarrow (2) By Remark 5.1 X is first countable and by Lemma 5.3 every closed set A is separable. The first countability of $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ at A means that there is a countable family \mathfrak{Z}'_A of sets of the form $\bigcap\{(B_i^c)^+ : i \in I\} \cap \bigcap\{S_j^- : j \in J\}$, I, J finite, (I possibly empty), $B_i \cap A = \emptyset, B_i \in \Delta, S_j \cap A \neq \emptyset, S_j$ open, which is a base at A in τ_{Δ}^+ . Put $\mathfrak{Z}_A = \{B \in \Delta : B \text{ occurs in the presentation of some element of } \mathfrak{Z}'_A\}$. So \mathfrak{Z}_A is countable, $\mathfrak{Z}_A \subset \{C \in \Delta : C \cap A = \emptyset\}$. Now let $D \in \Delta$ be such that $D \cap A = \emptyset$. So $A \in (D^c)^+$. There is $G \in \mathfrak{Z}'_A$ such that $A \in G \subset (D^c)^+$, since \mathfrak{Z}'_A is a base at A . Thus $G = \bigcap\{(B_i^c)^+ : i \in I\} \cap \bigcap\{S_j^- : j \in J\}$, I, J finite. By Lemma 3.1 $D \subset \bigcup\{B_i : i \in I\}$.

(2) \Rightarrow (1) Let $A \in CL(X)$ and \mathfrak{Z}_A be the family described in (2). Let $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ be a countable dense set in A , let $\mathfrak{B}(a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) be a countable base of neighbourhoods of a_i . Set $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{B}(a_i) : i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Then it is easy to see that the sets $\bigcap\{(B_i^c)^+ : i \in I\} \cap \bigcap\{S_j^- : j \in J\}$, I, J finite, $B_i \in \mathfrak{Z}_A$ and $S_j \in \mathfrak{A}$ forms a local base of τ_{Δ}^+ at A which is countable, of course.

Now we show that Theorem 5.4 has interesting applications.

Theorem 5.5.(see also [M]) Let (X, τ) be a T_1 -topological space. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_V)$ is first countable;
- (2) Every closed set is separable and has a countable base of neighbourhoods.

The following theorem completes a recent result of Beer [Be 3].

Theorem 5.6. Let (X, τ) be a Hausdorff space. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_F)$ is first countable;
- (2) X is first countable, every closed set is separable and every open set is hemicompact.

Proof. (1) \Rightarrow (2) From Theorem 5.4 we know that X is first countable and every closed set is separable. By Lemma 3.1 [Be 3] we know that every open set is hemicompact.

(2) \Rightarrow (1) We show that (2) implies (2) of Theorem 5.4 for $\Delta = K(X)$, where $K(X)$ is the family of nonempty compact subsets. Let $A \in CL(X)$, $A \neq X$. Put $V = X \setminus A$. Then V is hemicompact, so there is a countable family $\{K_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ of compact subsets of V such

that for every compact set $K \subset V$ there is a K_n such that $K \subset K_n$. So we have (2) from Theorem 5.4.

Observe that for a metric space (X, d) Theorem 5.4 has the following easier form.

Theorem 5.7. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$.

The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ is first countable;
- (2) X is second countable and for every $A \in CL(X)$ there exists a countable family $\mathfrak{F}_A \subset \{C \in \Delta : C \cap A = \emptyset\}$ such that for every $B \in \Delta$ with $B \cap A = \emptyset$ there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{F}_A$ with $B \subset \cup\{B_i : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Proof. The first countability of $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ implies the separability of X , so second countability of X and second countability is a hereditary property.

The following notion plays a central role in the last part of this section: a metric space is called UC space or Atsuji space (in recognition of Atsuji fundamental paper [At]) if each continuous function on the space with values in an arbitrary metric space is uniformly continuous. Atsuji spaces have been deeply investigated in the last three decades and a large list of topological characterizations of metrizable space which admit a compatible UC metric has been collected by Atsuji [At] and Rainwater [Ra].

Theorem 5.8. Let (X, d) be a metric space. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_V)$ is first countable;
- (2) X is second countable and every closed set has a countable character;
- (3) The set X' of all accumulation points of X is compact and the set $I(X)$ of all isolated points of X is countable;
- (4) The finest uniformity on X is a metric uniformity (i.e. X admits a compatible UC metric) and the set $I(X)$ of all isolated points of X is countable;

Proof. Only (2) \Leftrightarrow (3) and (2) \Leftrightarrow (4) need some comments. (2) \Leftrightarrow (3) By Theorem 2 of [Ra] compactness of X' is equivalent to the fact that every closed set has a countable

character. Since $X = X' \cup I(X)$, X' compact, X is second countable if, and only if, $I(X)$ is countable.

(2) \Leftrightarrow (4) Again, by Theorem 2 of [Ra] the finest uniformity on X is a metric uniformity if, and only if, every closed set has a countable character.

For metric spaces with a finite number of isolated points we have the following surprising result .

Theorem 5.9. Let (X, d) be metrizable space with a finite number of isolated points.

The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_V)$ is first countable;
- (2) X is compact.

Proof. (1) \Leftrightarrow (2) is (2) \Leftrightarrow (3) of the previous Theorem since $I(X)$ is finite.

Theorem 5.10. Let (X, d) be a dense in itself metrizable space. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{bV})$ is first countable;
- (2) X is boundedly compact.

Proof. (2) \Rightarrow (1) By Corollary 3.4 the boundedly compactness of X implies that $\tau_F = \tau_{bV}$ on $CL(X)$. Now we show that the boundedly compactness of X implies (2) from Theorem 5.6. Only the hemicompactness of every open set needs some comments. Of course X is hemicompact. So let U be an open set such that $U \neq X$. For every $n \in \mathbb{Z}^+$ put $D_n = \{x \in X : d(x, U^c) \geq 1/n\} \cap B(x_0, n)$, where x_0 is a fixed point from X . Then every D_n is compact and for every compact subset K of U there is $n \in \mathbb{Z}^+$ such that $K \subset D_n$. So $(CL(X), \tau_{bV})$ is first countable.

(1) \Rightarrow (2) Suppose X is not boundedly compact. There is a bounded closed set A which is not compact. Let $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ be a sequence in A without cluster points. There is a sequence of positive reals ε_n such that $\varepsilon_n < 1/n$ for each n and the family $\{S(x_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ is pairwise disjoint. Put $B = (X \setminus \cup\{S(x_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{Z}^+\}) \cup \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Then B is a closed set and by assumption $\chi(B, X) \leq \aleph_0$, where $\chi(B, X)$ is

the character of B (see Theorem 5.4). Let $\{U_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ be a base for B . For every $n \in \mathbb{Z}^+$ set $V_n = (U_n \cap S(x_n, \epsilon_n/2)) \setminus \{y_n\}$, where y_n is a point different from x_n . The set $L = \bigcup \{B(x_n, 3\epsilon_n/4) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ is closed, so $V = (X \setminus L) \cup \bigcup \{V_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ is an open set which contains B , but for every U_n we have that $U_n \not\subseteq V$.

Theorem 5.11. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$.

The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^{++})$ is first countable;
- (2) X is second countable and for every $A \in CL(X)$ there exists a countable family $\mathfrak{B}_A \subset \{C \in \Delta : D_d(A, C) > 0\}$ such that for every $B \in \Delta$ with $D_d(B, A) > 0$ there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{B}_A$ with $B \subset \bigcup \{B_i : i= 1, 2, \dots, n\}$.

Proof. The proof uses the same idea as the proof of Theorem 5.4.

The first countability of the proximal topology and the bounded proximal topology is equivalent to the second countability of the basic space X . But for the ball proximal topology this is not true as the following example shows.

Example 5.12. Consider l_2 with the metric induced from the usual norm of l_2 . Set $L = \{ce_1 + (1+1/n)e_{2n+1} : c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ and $X = L \cup \{ce_1 + e_{2n} : c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ and consider X with the induced metric. Then we have $L \cap B(ce_1 + e_{2n}, \sqrt{2}) = \emptyset$ for every $c \in \mathbb{R}$ and every $n \in \mathbb{Z}^+$ and of course L is closed. Suppose that the ball proximal topology is first countable. Let \mathfrak{B}_L be a countable family of balls disjoint with L as condition (2) of Theorem 5.11 requires. Let $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ be an enumeration of first components of centers of balls from \mathfrak{B}_L . Take a ball $B(k_0e_1 + e_{2t}, \sqrt{2})$ where $k_0 \neq c_s$ for every $s \in \mathbb{Z}^+$. Then infinitely many points $k_0e_1 + e_{2n}$ must be contained in some ball $B(c_s e_1 + e_{2m}, r)$ (s, m fixed). Then of course the radius r of this ball must be greater than $\sqrt{2}$. So this ball $B(c_s e_1 + e_{2m}, r)$ contains infinitely many points $c_s e_1 + (1+1/n)e_{2n+1}$, which are from L , a contradiction.

Now we find some necessary and sufficient conditions for second countability of hit-and-miss topologies.

Theorem 5.13. Let (X, τ) be a T_1 -topological space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ is second countable;
- (2) X is second countable and there is a countable family $\Delta' \subset \Delta$ such that for every $B \in \Delta, B \neq X$, and every open set V with $B \subset V$, there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta'$ such that $B \subset \bigcup\{B_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset V$.

Proof. (2) \Rightarrow (1) Let \mathcal{U} be a countable base of X . It is very easy to verify that the family of the sets of the form $B = \bigcap\{(S_j^c)^+ : j \in J\} \cap \bigcap\{V_i^- : i \in I\}$, I and J finite subsets of \mathbb{Z}^+ , $S_j \in \Delta', V_i \in \mathcal{U}$, is a countable base of τ_{Δ}^+ .

(1) \Rightarrow (2) If $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ is second countable, then X is second countable, since τ_{Δ}^+ is admissible. Let \mathfrak{B} be a countable base of τ_{Δ}^+ . Without loss of generality we may suppose that every element from \mathfrak{B} has the form $\bigcap\{(S_j^c)^+ : j \in J\} \cap \bigcap\{V_i^- : i \in I\}$, I and J finite subsets of \mathbb{Z}^+ , $S_j \in \Delta, V_i$ open. Put $\Delta' = \{B \in \Delta : B \text{ occurs in the presentation of some element from } \mathfrak{B}\}$. Then of course Δ' is a countable subfamily of Δ and we show that condition (2) is satisfied. So let $B \in \Delta, B \neq X$. Take V open such that $B \subset V$. We can suppose that $V \neq X$. Put $A = X \setminus V$. Then $A \in CL(X)$ and $A \in (B^c)^+$, so there is $L = \bigcap\{(S_j^c)^+ : j \in J\} \cap \bigcap\{V_i^- : i \in I\} \in \mathfrak{B}$ such that $A \in L$ and $L \subset (B^c)^+$. By Lemma 3.1 we have $B \subset \bigcup\{S_j : j \in J\}$ and of course $\bigcup\{S_j : j \in J\} \subset X \setminus A = V$.

Remark 5.14. By [Mi] the second countability of the Vietoris topology forces a T_1 -space X to be compact. The same proof shows that the second countability of the bounded Vietoris topology forces a metric space X to be boundedly compact (see also [LP]). One can guess that also the second countability of the ball topology will force the space to have compact closed proper balls. But this is not the case as the following example will show.

Example 5.15. Let l_{∞} be the normed linear space of the bounded real sequences with the usual sup norm. Let Θ be the origin and $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ be the standard base of l_{∞} . Consider the subspace $X = \{\Theta\} \cup \{e_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{3e_n : n \in F\}$, where F is a finite

set. Then $CL(X)$ with the ball topology is second countable, but X is not a space with nice closed balls.

In the paper [Be1] we can find some sufficient conditions for the second countability of the ball topology which are stronger than ones deduced from Theorem 5.13 for $\Delta = \mathfrak{B}$.

The proof of the following Theorem uses the same idea as the previous one.

Theorem 5.16. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$.

The following are equivalent:

- 1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^{++})$ is second countable;
- (2) X is second countable and there is a countable family $\Delta' \subset \Delta$ such that for every $B \in \Delta$, $B \neq X$, and $\varepsilon > 0$, there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta'$ such that $B \subset \bigcup \{B_i : i= 1, 2, \dots, n\} \subset S_{\varepsilon}[B]$.

Remark 5.17. The second countability of the proximal topology forces X to be totally bounded [BLLN], the second countability of the bounded proximal topology forces X to have every bounded closed set totally bounded [BL2]. The previous example shows that the analogous condition for the ball proximal topology, i.e. every proper closed ball is totally bounded, is far away to be necessary.

Under the condition of Theorem 2.7 in [Be1], i.e. that any two disjoint closed sets can be uniformly separated whenever one of them is a ball, the ball topology and the ball proximal topology coincide [HL]. So we can deduce Theorem 2.7 in [Be1] from Theorem 5.13.

We finish our paper with a result on metrizability of topologies which claims that the sufficient conditions for metrizability given in [BT2] are also necessary.

First we state the following proposition which helps us to show this.

Proposition 5.18. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ $((CL(X), \tau_{\Delta}^{++}))$ is metrizable;
- (2) $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ $((CL(X), \tau_{\Delta}^{++}))$ is second countable, regular and T_1 .

Proof. (2) \Rightarrow (1) is clear.

(1) \Rightarrow (2) Only the second countability needs some comments. From the first countability of $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ and Theorem 5.7 we know that X is separable. Let E be a countable dense set in X . Then the finite subsets of E form a countable dense set in $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$. The same is true for $((CL(X), \tau_{\Delta}^{++}))$.

We know from Section 4.4 in [Be 5] that the requirement of T_1 axiom of τ_{Δ}^+ and τ_{Δ}^{++} are equivalent to the condition that τ_{Δ}^+ and τ_{Δ}^{++} are not enlarged by adding the singletons to the generating family Δ .

So if we suppose that our family Δ in previous theorem contains singletons, then the condition T_1 + regularity of τ_{Δ}^+ (τ_{Δ}^{++}) is just the requirement that Δ is a Urysohn (uniformly Urysohn) family.

So we finish with the following theorems on metrizability, which completes results in [BT2].

Theorem 5.19. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $CL(X)$ containing singletons. The following are equivalent:

- (1) $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ is metrizable;
- (2) X is second countable and there is a countable family $\Delta' \subset \Delta$ such that whenever $D \in \Delta$ and $A \in CL(X)$ are disjoint, there are $D_1, D_2, \dots, D_n \in \Delta'$ such that $D \subset \text{Int } \bigcup \{D_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset \bigcup \{D_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset A^c$.

Proof. Only the part (1) \Rightarrow (2) needs some comments, since (2) \Rightarrow (1) has been proved in [BT2]. Let $D \in \Delta$ and $A \in CL(X)$ be disjoint. The condition of Urysohn family of Δ ([BT2]) implies that there are $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$ such that $D \subset \text{Int } \bigcup \{B_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset \bigcup \{B_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset A^c$. The second countability of $(CL(X), \tau_{\Delta}^+)$ implies by Theorem 5.13 that there is a countable subfamily Δ' of Δ such that for every $B \in \Delta$, $B \neq$

X , and every open set V with $B \subset V$, there are $C_1, C_2, \dots, C_n \in \Delta'$ such that $B \subset \bigcup \{C_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset V$. So for every $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ there are finitely many elements from Δ' , namely $C_1, C_2, \dots, C_{n(i)}$ with $B_i \subset \bigcup \{C_j : j = 1, 2, \dots, n(i)\} \subset A^c$. So we can conclude that there are finitely many elements $D_1, D_2, \dots, D_m \in \Delta'$ such that $D \subset \text{Int} \bigcup \{D_i : i = 1, 2, \dots, m\} \subset \bigcup \{D_i : i = 1, 2, \dots, m\} \subset A^c$.

Theorem 5.20. Let (X, d) be a metric space and Δ be a nonempty subfamily of $\text{CL}(X)$ containing singletons. The following are equivalent:

- (1) $(\text{CL}(X), \tau_{\Delta}^{++})$ is metrizable;
- (2) X is second countable and there is a countable family $\Delta' \subset \Delta$ such that whenever $D \in \Delta$ and $A \in \text{CL}(X)$ are far, i.e. $D_d(A, D) > 0$, there are $D_1, D_2, \dots, D_n \in \Delta'$ and $\delta > 0$ such that $S_d[D, \delta] \subset \bigcup \{D_i : i = 1, 2, \dots, n\} \subset A^c$.

Proof. Only the part (1) \Rightarrow (2) needs some comments, since (2) \Rightarrow (1) has been proved in [BT2]. The condition of uniformly Urysohn family Δ ([BT2]) and the condition of second countability of $(\text{CL}(X), \tau_{\Delta}^{++})$ from Theorem 5.16 gives us the result.

Acknowledgement. Work performed under the auspices of G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) and Topologia M.U.R.S.T. 40% grant. The authors would like to thank Anna Di Concilio for reference [Ra].

REFERENCES

- [At] M; Atsugi, *Uniform continuity of continuous functions of metric spaces*, Pacific J. Math 8 (1958), 11- 16.
- [A] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, New York, 1984.
- [Be1] G. Beer, *Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets*, Bull. Australian Math. Soc.35(1987), 81-86.

- [Be2] G. Beer, *The slice topology; a viable alternative to Mosco convergence in nonreflexive spaces*, Sem. d'Anal. Convex Montpellier (1991), exposé N° 3, *Nonlinear Anal.* **19** (1992), 271-290.
- [Be3] G. Beer, *On the Fell topology*, *Set valued analysis* **1**(1993), 69-80.
- [Be4] G. Beer, *On Mosco convergence of convex sets*, *Bull. Australian Math. Soc.* **38** (1988), 239-253.
- [Be5] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [BK] G. Beer, P. Kenderov, *On the arg min multifunction for lower semicontinuous functions*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), 107-113.
- [BL1] G. Beer, R. Lucchetti, *Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [BL2] G. Beer, R. Lucchetti, *Well posed optimization problems and a new topology for the closed sets of a metric space.*, *Rocky Mountain J. Math.*, to appear.
- [BLLN] G. Beer, A. Lechicki, S. Levi, S. Naimpally, *Distance functionals and the suprema of hyperspace topologies*, *Annali di Mat. pura ed applicata*, **162** (1992), 367-381.
- [BT1] G. Beer, R. Tamaki, *On hit-and-miss hyperspace topologies*, CMUC, to appear.
- [BT2] G. Beer, R. Tamaki, *The infimal value functionals and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies*, P.A.M.S.(1994).
- [CLZ] C. Costantini, S. Levi, J. Zieminska, *Metrics that generate the same hyperspace convergence*, *Set-Valued Analysis*, **1** (1993), 141-157.
- [DN] G. Di Maio, S. Naimpally, *Comparison of hypertopologies*, *Rendiconti di Trieste*, **22** (1990), 140-161.
- [Fe] J. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 472-476.
- [HL] L. Hola, R. Lucchetti, *Equivalence of hypertopologies*, preprint.
- [KT] E. Klein, A.C. Thompson, *Theory of correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

- [LP] R. Lucchetti, A. Pasquale, *The bounded Vietoris topology*, *Ricerche di Matematica*, to appear.
- [M] T. Mizokami, *Cardinal functions on hyperspaces*, *Coll. Math.* **41** (1976), 201-205.
- [Mi] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **71** (1951), 151-182.
- [Na] L. Nachman, *Hyperspaces of proximity spaces*, *Math. Scan.* **23** (1968), 201-213.
- [Po] H. Poppe, *Einige Bemerkungen uber den rarem der algerchlossen mengen*, *Fund. Math.* **59** (1966), 159-169.
- [Ra] J. Rainwater, *Spaces whose finest uniformity is metric*, *Pacific J. Math* **9** (1959), 567-570.
- [SZ] J. Sontag, C. Zălinescu, *Set convergence: an attempt of classification*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **340**, **1** (1993), 199-226.

Giuseppe Di Maio
Istituto di Matematica
Seconda Università di Napoli
Villa Vitrone
81100 Caserta
Italia

Ľubica Holá
Institute of Mathematics
Academy of Sciences
Stefanikova, 49
814 73 Bratislava
Slovakia

IL RISCHIO GEOLOGICO *SENSU LATO* AL SOMMA-VESUVIO^(*)

Nota di **FILIPPO RUSSO *** & **MARIO VALLETTA ****

(con la collaborazione di **COSIMO GRANATA *****)

Presentata dai soci **L. Brancaccio, B. D'Argenio e G. Luongo**

Adunanza del 1 Aprile 1995

RIASSUNTO

L'elaborazione ed il coordinamento di un cospicuo insieme di elementi geologici, geomorfologici, vulcanologici, idrologici, climatici e vegetazionali ha consentito di individuare e caratterizzare lo stato di rischio che interessa tutta l'area vesuviana.

Il Rischio geologico s.l. è stato considerato quale sommatoria di fenomenologie di rischio parziali connesse sia alla normale attività vulcanica che alla morfoevoluzione dell'area.

L'elemento antropico, nell'ultimo cinquantennio, ha concorso più degli altri a determinare la situazione di rischio. Un'attenta analisi dei fattori del rischio ha consentito di elaborare una "Carta della macrozonazione del Rischio geologico s.l." che risulta dall'integrazione e dal coordinamento del possibile - e variabile - peso di tutti gli elementi del rischio e sintetizza la filosofia dell'intera ricerca.

Tale elaborato, pur essendo una *summa* di valutazioni semiquantitative, rappresenta un documento univoco che consente ponderate valutazioni di rischio ambientale e materializza una base importante per la programmazione territoriale e la gestione delle risorse.

Le macrozone individuate sono caratterizzate da differenti valori del rischio: la falda pedemontana meridionale, ad esempio, è caratterizzata dai valori più elevati di rischio geologico s.l., condizionati sia dal peso abnorme dell'urbanizzazione che da un rilevante dissesto idrogeologico; localizzate e, comunque, modeste risultano le modificazioni indotte dalle eruzioni vulcaniche.

La "Carta dello sviluppo dell'antropizzazione", che palesa la crescita urbana degli ultimi decenni, è anche chiave di lettura dell'evoluzione dinamica nel tempo del fattore Valore. Gli elementi di base utilizzati per l'elaborazione della "Carta della Pericolosità vulcanica" sono - largamente, ma non esclusivamente - derivati dalla letteratura. Sono, infatti, stati presi in considerazione i prodotti emessi nel corso degli ultimi duemila anni, dando particolare importanza, nell'ottica della morfogenesi, alle eruzioni effusive e/o miste.

Per una definizione globale del Rischio nell'area vesuviana sono stati valutati anche altri elementi quali, per esempio: la vegetazione, l'uso del suolo, le caratteristiche idrologiche e quelle morfologiche; alcuni di essi sono rappresentati con appositi elaborati.

(*) Questo lavoro è stato stampato grazie ai contributi dei fondi di ricerca di cui sono titolari i Proff. L. Brancaccio, P. Gasparini e G. Luongo.

Il termine potenziale, usato come qualificativo nelle definizioni sia del rischio che dei suoi fattori, ha valenza di elemento di mitigazione, stante il margine, talora inevitabile, di soggettività di talune delle valutazioni.

ABSTRACT

The comparative analyses of geological, geomorphological, hydrological, climatic and vegetational features has allowed to characterize the state of total risk of all Vesuvian area. In such a densely populated area no attention has been put on problems arising from the interaction between the volcano, with a peculiar geomorphological evolution, and human beings with their widespread activities.

The Geological Risk s.l. has been evaluated by taking into account the activity of the volcano and its geomorphological evolution, which has strongly been influenced by increasing anthropic pressure beginning from last eruption occurred in March 1944. In this period lost of human lives and damages to the environment have greatly been induced by anthropic activities that changed the normal surface run-off into a serious hydrogeological hazard becoming an important factor of risk in association with the volcanic one.

The "Map of macrozoning of the Geological Risk s.l." rises from a semiquantitative analysis of all features causing it, especially the anthropic one, and represents a reliable way to evaluate the environmental risk in the Vesuvian area and to manage correctly resources in socio-economical terms. This map locates several macrozones, characterized by different degree of geological risk: it is evident, for instance, that high degree of risk, which characterizes southern Vesuvian piedmont, is caused by a strong anthropic pressure and by joined drastic changes as far as concern hydrogeological attitude. It has to be outlined that this sector is characterized by the lowest degree of territorial modifications caused by volcanic events.

As far as concern resource management, as well important are the maps of Hydrogeological hazard and Vulnerability.

The "Map of Volcanic hazard", worked out most of all on the basis of volcanological, stratigraphical and geological data get from specialist literature, took particularly into account effusive and/or mixed eruptions occurred during last two thousand years.

The anthropization is an important morphogenetic agent as far as concern hydrogeological system: so, particular attention has been put on taking into account its role because of abnormal and lacking in judgement increasing during last forty years. In this way has to be read the "Map of development of anthropization", obtained superposing topographical maps relating to periods preceding the fifties, to middle of fifties and to middle of eighties.

Other maps show features which are important in order to evaluate geological risk in the short/medium time as land use (submitted to human pressure), hydrogeological attitude and geomorphological characteristics.

It has to be emphasized, in the end, that word "potential", employed defining geological risk and its factors, has been used as mitigative element concerning for some unavoidable subjectivity sometimes inherent assessments.

Parole chiave: Somma-Vesuvio, Pericolosità vulcanica, Pericolosità idrogeologica, Antropizzazione, Vulnerabilità idrogeologica, Rischio geologico.

Key words: Somma-Vesuvius, Volcanic hazard, Hydrogeological hazard, Anthropization, Hydrogeological vulnerability, Geological risk.

PREMESSA

L'analisi della letteratura è assai indicativa del persistere di una filosofia di fondo che vede nel complesso del Somma-Vesuvio "solamente" un vulcano. In tal modo, il "rischio" considerato è prevalentemente (se non esclusivamente) quello vulcanico e l'assetto morfologico è solo un elemento degli scenari delle aree potenzialmente invadibili da colate laviche o di fango, ed il danno possibile è visto esclusivamente quale effetto di eventi vulcanici *stricto sensu*.

Per contro, una analisi dei periodi di assoluta quiescenza vulcanica, come quello compreso tra l'evento eruttivo del 1944 ed oggi, evidenzia come l'area vesuviana sia stata e sia sede di numerosi e ripetuti "eventi" che hanno causato la perdita di molte vite umane e danni assai rilevanti sia agli insediamenti che alle attività antropiche.

Gli elementi che hanno determinato tali eventi sono sia quelli naturali (caratteristiche geologiche e peculiarità fisiche del territorio) che quelli variamente legati all'insediamento antropico ed alle attività comunque correlate.

I primi sono, sostanzialmente, riconducibili all'assetto litologico e strutturale, al quadro vulcanologico, alle caratteristiche idrogeologiche ed al quadro geomorfologico, da un lato, ed alle peculiarità sia meteorologiche che geologiche dei bacini di drenaggio, dall'altro. I secondi, sono riferibili sia agli insediamenti umani che agli usi del suolo ad essi direttamente o indirettamente connessi.

Lo sviluppo di questa nota, ad iniziare dalla stessa introduzione, puntualizza concetti e limiti dei fattori Pericolosità, Vulnerabilità e Rischio, illustrando in dettaglio gli agenti che li determinano. Si è visto che, a parità di penalizzazione legata a tutti gli altri fattori, il solo peso della antropizzazione è sufficiente a condizionare, sino a valori anche assai elevati, la variabilità del grado di rischio.

Da sottolineare, infine, l'attenzione che la stampa, quotidiana e periodica, ha, da sempre, dedicato al problema, anche se la difficoltà - non lieve - di "fornire" una informazione che, pur rivolta a tutti, rimanesse scientificamente corretta ha fatto sì che non sempre il risultato fosse proporzionale all'impegno, anche sociale.

INTRODUZIONE

Il complesso vulcanico del Somma-Vesuvio (il piedimonte sudoccidentale del quale materializza gran parte della costa del Golfo di Napoli) sorge in una delle aree più densamente popolate d'Italia. Vulcano attivo (l'ultima eruzione si è manifestata nel Marzo del 1944) ed attualmente quiescente, esso è parte integrante della porzione meridionale della Piana Campana, sulla quale si innalza per 1281 metri.

Sia per la posizione geografica che per la ricchezza delle sue terre quest'area è stata, da sempre, sede elettiva dell'uomo, che ha intrecciato con il vulcano una complessa coabitazione, che in non pochi casi (per esempio, eruzioni del 79 d.C. e del 1631) si è rivelata sostanzialmente incauta.

Oggi, nonostante l'ultima eruzione risalga a quasi cinquant'anni, sembra regnare in-contrastata l'indifferenza delle popolazioni residenti a dispetto delle campagne di sensibilizzazione e sorveglianza poste in essere dagli organismi scientifici, quali ad esempio l'Osservatorio Vesuviano.

Esiste, dunque, una reale situazione di rischio.

Il Rischio (R), in generale, è la possibilità di una perdita (vite umane, proprietà, capacità produttiva, funzionalità del territorio, ecc.) ed il valutarlo implica la quantificazione della relazione (UNESCO, 1972):

$$R = V \times U \times P$$

Per Pericolosità (P) s'intende la probabilità che una certa area venga interessata da un dato evento (fenomeno non definito), potenzialmente distruttivo, entro un determinato periodo di tempo.

Per Valore (V) s'intende il numero di persone, di opere di edilizia civile, di superfici agricole utilizzate produttivamente, ecc. che sono esposti al pericolo.

Per Vulnerabilità (U) s'intende la percentuale del valore esposto al pericolo che si stima possa essere perduto nel corso di un determinato evento.

Mentre per la valutazione del Valore esposto (V) e della Vulnerabilità (U) vengono presi in considerazione soprattutto i dati socio-economici relativi al territorio considerato, valutare la Pericolosità (P) implica, per contro, la conoscenza diretta del territorio per individuare sia il tipo e l'entità del pericolo ai quali è soggetta l'area, che le modalità e la frequenza con cui esso si manifesta. Nel caso del Somma-Vesuvio, apparato vulcanico attivo, la Pericolosità (P) è connessa direttamente alla manifestazione di un eventuale episodio eruttivo ed all'incidenza che esso avrà su uomini, cose e territorio. In tal senso, quindi, si parla di Rischio vulcanico, per la valutazione del quale numerose sono le opere che forniscono contributi assai validi (LUONGO, 1986; SANTACROCE, 1987; CNR-GNV, 1990).

Il Rischio geologico (Rg) sarà espresso, tenendo invariato il Valore esposto (V), dalla relazione:

$$R_g = V \times (U_v + U_i + U_s + \dots) \times (P_v + P_i + P_s + \dots)$$

dove U_v e P_v sono, rispettivamente, vulnerabilità e pericolosità legate agli eventi eruttivi, U_i e P_i a quelli idrogeologici, U_s e P_s a quelli sismici, ecc.

Stante le finalità della presente nota, si è preferito evidenziare due soli aspetti delle fenomenologie geologiche e geomorfologiche: la Pericolosità vulcanica (P_v) e quella derivante dal dissesto idrogeologico (P_i), che sostanziano, in questo territorio, la massima espressione di pericolo. E ciò per due motivi di fondo, di grande rilevanza:

1) il Vesuvio è un vulcano attivo quiescente ed un'eventuale futura ripresa dell'attività eruttiva metterebbe seriamente a repentaglio ogni cosa esistente sul territorio;

2) per il suo peculiare assetto litologico e geomorfologico e per le caratteristiche climatiche, il territorio vesuviano è soggetto ad un grave dissesto idrogeologico che causa, almeno stagionalmente, seri danni al patrimonio ambientale e socio-economico e non raramente alle stesse vite umane.

In conclusione, il Rischio geologico al Somma-Vesuvio potrebbe definirsi come il prodotto del Valore esposto per il prodotto delle sommatorie delle Vulnerabilità e delle Pericolosità idrogeologiche e vulcaniche

$$R_g = V \times (U_i + U_v) \times (P_i + P_v)$$

Bisogna tenere presente, tra l'altro, che in questo tipo di valutazione, dove parte preponderante del fattore Valore e , in misura minore, di quello Vulnerabilità è rappresentato dalla urbanizzazione e dalla presenza dell'uomo con le sue attività, è assolutamente necessario considerare l'entità di un altro parametro che RUSSO & VALLETTA (1993) hanno elevato al rango di fattore del Rischio: l'Organizzazione sociale (O), che, infatti, ha chiara funzione di deterrente del Rischio dove la società è organizzata ed efficiente (PANIZZA, 1990).

Pertanto, la definizione di Rischio geologico s.l. nell'area vesuviana può essere rappresentata dalla relazione seguente:

$$Rg \text{ s.l.} = V \times [(U_i + U_v) \times (P_i + P_v)] / O$$

dove O è il parametro Organizzazione sociale che agisce direttamente nella valutazione del fattore Vulnerabilità. D'accordo con gli Autori appena citati, il fattore Valore (V) può essere addirittura escluso, sul piano pratico, dalla relazione, in quanto è implicita la sua presenza, quale costante, qualora si parli di Rischio.

1. INQUADRAMENTO GEO-VULCANOLOGICO DELL'AREA DEL SOMMA- VESUVIO

Il complesso vulcanico del Somma-Vesuvio domina la porzione costiera meridionale del graben peritirrenico plio-quadernario della Piana Campana, sottesa dai rilievi dell'Appennino campano ed aperta, verso sud-sudovest, sul Mar Tirreno.

Gli studi condotti circa i meccanismi di individuazione e l'evoluzione del "graben", hanno evidenziato la presenza di una complessa successione stratigrafica, spessa 2-3 km e chiaramente connessa ai fenomeni tettonici, vulcanici e geomorfici che, a partire dalla fine del Pliocene e per tutto il Quaternario, hanno presieduto alla costruzione di questa depressione morfotettonica (IPPOLITO et alii, 1973; FINETTI & MORELLI, 1974; BALDI et alii, 1976; ORTOLANI & APRILE, 1979; APRILE et alii, 1978; CINQUE et alii, 1987; FEDI & RAPOLLA, 1987; BRANCACCIO et alii, 1991).

Numerosi sono gli studi vulcanologici (i primi risalgono a più di un secolo fa) circa successione e storia geologica del vulcanismo campano (ed a tal proposito, vale la pena ricordare le tre monografie del C.N.R. dedicate a questo argomento: ROSI & SBRANA, 1987; SANTACROCE, 1987; VEZZOLI, 1988), il cui inizio può essere considerato contemporaneo o di poco successivo alle prime fasi tettoniche manifestatesi tra la fine del Pliocene e l'inizio del Pleistocene. Nell'area in esame, le indicazioni stratigrafiche (BERNASCONI et alii, 1982) fanno risalire l'inizio del vulcanismo alla parte alta del Pleistocene inferiore (SANTACROCE, 1987; CINQUE et alii, 1987).

I prodotti vulcanici affioranti sono, in realtà, più recenti e riferibili ad un periodo che va dalla metà del Pleistocene superiore ai nostri giorni. Lo studio di tali prodotti ha reso possibile la ricostruzione di una dettagliata cronostatigrafia delle eruzioni somma-vesuviane a partire da circa 25.000 anni fa. A tetto della Ignimbrite Campana, riferita ad un'eruzione flegrea avvenuta tra 42.000 e 28.000 anni fa, sono stati individuati, infatti, molti livelli lapillici con associati, talora, depositi di colata piroclastica e/o *surge*, alcuni

referibili ad eruzioni pliniane avvenute nell'intervallo tra 25.000 anni ed il 79 d.C. (DELIBRIAS et alii, 1979; SANTACROCE, 1987). A questi livelli, sono, a luoghi, intercalate colate laviche originatesi sia dal cratere centrale che da centri di emissione secondari ubicati sulle falde del vulcano.

Tali piroclastiti e le colate laviche associate costituiscono lo scheletro del complesso vulcanico e sono quasi costantemente ricoperti dai prodotti più recenti, eruttati tra il 79 d.C. ed il 1944, legati ad eruzioni di tipo subpliniano, stromboliano ed effusivo. Questi prodotti piroclastici sono distribuiti prevalentemente nei settori settentrionali del vulcano; quelli lavici e talune colate piroclastiche, stante la particolare configurazione morfologica dell'apparato, nei settori meridionali.

1.1. La Carta litologica dell'area del Somma-Vesuvio

Le litologie affioranti costituiscono un parametro fondamentale nella definizione del rischio idrogeologico. Quelle cartografate sono riferibili a prodotti vulcanici primari (colate laviche e piroclastiche, depositi di *base surge* e livelli di ceneri, pomici e scorie da caduta) e, solo subordinatamente, a fenomenologie non strettamente vulcaniche (colate torrentizie o *lahars*).

La Carta litologica, redatta inizialmente alla scala 1:25.000, non rappresenta, di per sé, un contributo nuovo alla cartografia vesuviana: tuttavia, le numerose osservazioni di campagna di uno degli autori (F.R.) hanno consentito di apportare alcune modifiche alla cartografia geologica esistente, in particolare per le zone meridionali del complesso vulcanico. Le età dei terreni rappresentati sono diverse, ma sempre ricadenti nell'intervallo 25.000 anni b.p. - 1944, anche se, ovviamente, i prodotti del periodo 79 d.C. - 1944 sono i più diffusi in affioramento. I terreni più antichi, stante la configurazione del complesso vulcanico, sono caratteristici delle aree settentrionali e orientali, entro le quali è ben evidente il recinto dell'antico vulcano-strato calderizzato del Somma, ed affiorano solo sporadicamente nei settori meridionali. Quelli relativi al periodo 79 d.C. - 1944 sono invece di gran lunga i più diffusi in tutti i settori meridionali e si dipartono dalla base del cono vesuviano. I depositi affioranti sono sia sciolti che lapidei: i primi sono rappresentati da piroclastiti prevalentemente in giacitura primaria, i secondi, invece, esclusivamente dalle colate laviche. Le superfici occupate da tali terreni sono praticamente equivalenti e la loro distribuzione intorno all'edificio vulcanico riflette, quasi uniformemente, quella già precedentemente accennata per le età. Infatti, i settori meridionali sono caratterizzati dalla prevalenza di terreni lapidei; quelli settentrionali, di piroclastiti sciolte.

I terreni così individuati sono stati raggruppati in quattro classi litologiche (o gruppi di litologie omogenee) in funzione della natura, delle caratteristiche granulometriche e tessiturali nonché in relazione al grado di permeabilità ed erodibilità.

Di seguito, vengono descritte, qualitativamente, le caratteristiche dei terreni riferiti a ciascuna classe litologica (per i dettagli tecnici si rimanda a: PENTA & DEL VECCHIO, 1936; PELLEGRINO, 1967; NICOTERA & LUCINI, 1967; LIRER & PESCATORE, 1968).

1.1.1. Colate laviche (I classe)

In questo gruppo rientrano le colate laviche affioranti nell'area del Somma-Vesuvio e nella immediata periferia (Collina di Pompei Scavi). Dal punto di vista tessiturale, si

tratta di lave a blocchi pseudoprismatici (subordinatamente è presente qualche colata di lava a corda, come quella del 1858) caratterizzate da una struttura porfirica con grossi fenocristalli di pirosseno, leucite e rara olivina. Dal punto di vista petrografico, si è a fronte di tefriti leucitiche e leucotefriti tendenti a leucititi. Le colate sono diffuse esclusivamente nei settori meridionali, si dipartono dal cono vesuviano e, in taluni casi, giungono fino al mare. La maggior parte è concentrata intorno alla porzione collinare meridionale del Vesuvio (area del Piano delle Ginestre), dove la particolare morfologia ha consentito uno straordinario accumulo di depositi lavici in bassi topografici naturali. Allo stesso modo, anche la depressione intercalderica semilunata, esistente tra la parete interna del Somma ed il fianco esterno settentrionale del cono vesuviano, è pavimentata da colate laviche, accumulate in epoca recente; alcune (lave del 1872, 1906, 1929 e 1944), dopo aver superato la soglia della valle intercalderica, si sono riversate lungo le pendici esterne dell'apparato vulcanico, avvicinando o raggiungendo i centri abitati di S. Sebastiano al Vesuvio, Boscotrecase e Terzigno.

Salvo i depositi lavici della collina di Pompei, di età preistorica, tutti gli altri sono molto recenti e riferibili, in particolar modo, all'attività eruttiva del periodo 1631-1944. Solo lungo la fascia costiera sono presenti lave (p. es. in località Villa Inglese a Torre del Greco) di età medioevale.

Le colate laviche sono spesso sovrapposte tra loro e, solo raramente, a quelle piroclastiche (p. es. lave del 1631, a Torre Annunziata, Torre del Greco, Ercolano e Portici). Più frequentemente, invece, esse sono caratterizzate dalla presenza di una modestissima copertura di piroclastiti sciolte (livelli di scorie stromboliane o di ceneri e lapilli), spessa mediamente 1 metro, che si presentano in giacitura primaria sulle colate più recenti e più spesso sono rimaneggiate su quelle più antiche. In entrambi i casi, lo spessore del deposito piroclastico è veramente modesto e non può essere confuso con il livello di scorie autobrecciate che costituisce il carapace della colata lavica. Tale carapace è sempre presente tanto alla sommità che alla base della colata e con spessori generalmente non superiori a 1-1,5 m. Il corpo centrale della lava è massiccio e mai di spessore inferiore a 0,5 m, presenta rare strutture fluidali e numerose fratture subverticali, raramente si presenta vacuolare o con grosse cavità, come accade in alcune colate di lava a corda.

In generale, ai depositi di questa classe si può attribuire un grado di permeabilità, per fratturazione, tra alto e medio-alto ed un bassissimo grado di erodibilità.

1.1.2. *Alternanze di piroclastiti sciolte e lave (II classe)*

I terreni riferiti a questa classe sono costituiti da lave alternate a livelli di scorie e piroclastiti e sono presenti nelle sole aree apicali dell'edificio, quali la parte interna della caldera del Somma e del cono craterico vesuviano. Alla stessa classe appartengono i prodotti lavici, con sottile copertura piroclastica, delle parti alte del fianco esterno del Somma, e quelli affioranti nel settore meridionale del vulcano e sul fondo delle incisioni torrentizie che lo solcano.

I corpi lavici hanno uno spessore variabile, ma quasi mai inferiore ad 1 m: le piroclastiti, invece, sono generalmente rappresentate da distinti livelli scoriacei e cineritici spessi da qualche decimetro a qualche metro. Talora sono presenti grosse bancate (spesse 1-3 m) di depositi da colata piroclastica, costituiti da grossi frammenti lavici immersi in una matrice cineritica e lapillacea.

Nel complesso, i depositi di questa classe si possono ritenere mediamente permeabili

e caratterizzati da erodibilità maggiore che non quella delle lave.

1.1.3. Piroclastiti in giacitura primaria e rimaneggiate (III classe)

A questa classe appartengono sia i prodotti piroclastici indistinti (quasi sempre sottostanti a modestissimi livelli di ceneri, sabbie e lapilli da caduta), riferibili all'attività eruttiva vesuviana dell'ultimo millennio, che quelli da caduta, da colata piroclastica, da *surge* e da *lahar* emessi nel periodo 17.000 anni-79 d.C. Gli spessori dei primi variano da pochi decimetri a qualche metro; i secondi sono massivi, hanno matrice sabbioso-cineritica, presentano spessori variabili e sono frequentemente intervallati a spessi paleosuoli. A questa classe sono riferibili anche i depositi scoriacei dei conetti eruttivi laterali preistorici (come i Camaldoli della Torre) e storici, ubicati sui fianchi del complesso vulcanico, e quelli da colata torrentizia, caratterizzati da banchi di conglomerati a matrice fine cineritica o sabbiosa con sottili livelli, sabbiosi ed a granulometria più fine, spesso interstratificati. Più rari sono i depositi delle colate di detrito (*debris flow*), risultanti dall'accumulo caotico di massi e blocchi, erosi dalle pareti del cratere, inglobati entro una scarsa matrice sabbiosa o limosa.

Generalmente i depositi di colata piroclastica e torrentizia, affioranti sul versante settentrionale del complesso vulcanico, sono granulometricamente più fini rispetto a quelli affioranti sul versante meridionale. In quest'ultimo, in particolare, sono estremamente diffusi i depositi piroclastici dell'eruzione pliniana del 79 d.C. con facies e spessori variabili (SIGURDSSON et alii, 1985).

Una valutazione qualitativa porta ad attribuire, nel complesso, a questi depositi una permeabilità medio-bassa ed una facile erodibilità.

1.1.4. Piroclastiti indifferenziate e depositi non vulcanici (IV classe)

A questa classe appartengono i prodotti piroclastici indifferenziati e frequentemente rimaneggiati delle aree pedemontane dell'apparato vulcanico e della pianura circostante. Essi sono costituiti da piroclastiti da caduta e da sedimenti fini, che rappresentano le facies distali dei depositi da colata piroclastica e torrentizia. Spesso costituiscono i sedimenti di piatte conoidi alluvionali che si sfrangiavano distalmente, prima della bonifica iniziata dai Borboni, in bacini palustri a sedimentazione argillo-torbosa.

Nelle aree più costiere (Piana del Sarno) sono presenti sedimenti sabbiosi e limosi, rapportabili a linee di costa oloceniche, talora ricoperti da terreni palustri e alluvionali (BARRA et alii, 1989). Questi ultimi caratterizzano più specificamente le aree subpianeggianti a NNE e ad ONO del complesso vulcanico. A luoghi, livelli tufacei e pomicei, relativi alle eruzioni flegree, nonché livelli di pomici da caduta di antiche eruzioni esplosive vesuviane, completano la successione dei terreni affioranti. Complessivamente, si può ritenere che tutti questi depositi siano caratterizzati da una discreta erodibilità e da una permeabilità generalmente bassa.

2. IL RISCHIO VULCANICO NELL'AREA DEL SOMMA-VESUVIO

In un'area densamente antropizzata come quella vesuviana, la valutazione del Rischio vulcanico è fattore importante per la definizione e la precisazione del "Rischio geologico".

I modelli previsionali dell'attività sono, però, basati su dati essenzialmente statistici, derivati dalla ricostruzione della storia eruttiva del vulcano: è evidente, allora, il limite di attendibilità di ogni modello che si possa proporre, stante la stretta interrelazione tra esso e la conoscenza, che non ha ancora raggiunto il necessario dettaglio, della storia eruttiva del vulcano (AA.VV., 1979; LUONGO, 1981).

Tanto i dati storico-letterari che quelli geologico-stratigrafici non concorrono, infatti, ad una corretta ricostruzione della storia eruttiva del Vesuvio che per il periodo 1631-1944 e sono sempre più lacunosi per i periodi antecedenti il 1631 (DELIBRIAS et alii, 1979; SANTACROCE, 1987; ROLANDI & RUSSO, 1989). La storia eruttiva è, quindi, nota solo per un periodo di tempo estremamente limitato, entro il quale inoltre non sono rappresentate tutte le possibili tipologie eruttive, va poi considerato anche che lo scenario sociale che si propone potrebbe risultare inficiato, al momento dell'eruzione, da altri fattori solo indirettamente connessi all'attività vulcanica.

Contributi significativi all'affinamento del modello previsionale dell'attività vulcanica sono dovuti a: AA.VV., 1979; SCANDONE, 1979a; BARBERI et alii, 1979; 1983; BARBERI & SANTACROCE, 1981; SHERIDAN et alii, 1981; ROSI et alii, 1982; SCANDONE & CORTINI, 1982; BARBERI & GASPARINI, 1983; SHERIDAN & MALIN, 1983; SANTACROCE, 1987; 1989; ROLANDI, 1989.

Il Rischio vulcanico, pur non rappresentando che una componente del Rischio geologico dell'area vesuviana, avrebbe potuto, potrebbe e dovrebbe condizionarne - e da solo - la pianificazione territoriale: ed a tale proposito, varrà la pena, da un lato, andare con la mente ai contenuti della parte di questa nota che si occupa dello sviluppo dell'antropizzazione e, dall'altro, osservare lo scenario ipotizzato (CNR-GNV, 1990) in caso di eruzione.

Nel periodo immediatamente post-eruttivo, infatti, gli effetti che permangono sul vulcano stesso (depositi piroclastici e/o colate di lava) rappresentano elemento di cospicuo rilievo di un'altra delle componenti del Rischio geologico: il Rischio idrogeologico. Come si è potuto osservare negli anni successivi ad un evento eruttivo, le profonde modificazioni topografiche indotte dalla deposizione dei prodotti vulcanici s.l. hanno contribuito, da sole e non poco, con tutto quanto ne consegue a livello, ad esempio, del *pattern* del drenaggio, ad esaltare lo *status* di pericolosità reale e potenziale per gli uomini e le cose addensati attorno al vulcano.

Una tale situazione ha sempre rappresentato motivo di preoccupata attenzione anche se la traduzione di tanto in atti concreti non è stata proporzionale, in termini diretti ed efficaci, che raramente: esempio di ciò sembra ravvisabile nella sola legge 390 del 1907, che disponeva capillari e massicci interventi di sistemazione idraulico-forestale per ovviare alle conseguenze indotte dall'eruzione del 1906.

2.1. La Carta della Pericolosità vulcanica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio

La redazione di una "Carta della Pericolosità vulcanica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio" è condizionata dall'essere estremamente difficile la ricostruzione della storia eruttiva e la conseguente applicazione di un modello previsionale attendibile.

A ciò va aggiunto il fatto, non meno importante, che il Vesuvio ha manifestato, nel corso degli ultimi secoli, varie tipologie eruttive ognuna delle quali potrebbe interessare

totalmente, parzialmente o niente affatto il territorio vulcanico urbanizzato, e vanno, inoltre, considerate tutte quelle fenomenologie (sismiche, meteorologiche, ecc.) che, connesse all'eruzione, si manifestano prima, durante e dopo l'evento e possono talora risultare, per talune zone, più dannose degli effetti dell'eruzione stessa.

Anche se alcuni autori (SCANDONE, 1979b; BARBERI & SANTACROCE, 1981; BARBERI et alii, 1979; 1983; ROSI et alii, 1982; SHERIDAN & MALIN, 1983; SANTACROCE, 1987; 1989) hanno provato a classificare i tipi di attività eruttiva del Vesuvio e la pericolosità che da essi deriva, non sembra, tuttavia, possibile, alla luce di tutte le considerazioni svolte, affermare che esista la possibilità che per il Vesuvio si abbia un evento eruttivo tale da non suscitare alcuna pericolosità per le aree antropizzate circostanti.

Sembra, allora, opportuno proporre una Carta della Pericolosità vulcanica che, basandosi sulla distribuzione attuale dei soli effetti diretti delle eruzioni vesuviane (prodotti piroclastici in giacitura primaria o rimaneggiati, colate di lava, bocche eccentriche, ecc.), rappresenti anche, in senso attualistico, la probabilità con la quale le vulcaniti emesse nel corso di future eruzioni, di qualsiasi tipologia, continuino a deporsi entro le medesime aree interessate negli ultimi 1900 anni.

Viene, in tal modo, introdotta una evidente semplificazione nel modello previsionale, poichè le altre fenomenologie connesse all'eruzione - e non sono poche - sono di difficile valutazione e previsione e rappresentano una incognita importantissima.

Nella Carta della Pericolosità vulcanica, che accompagna questa nota, entro il territorio vulcanico sono stati, di fatto, distinti tre settori, i primi due dei quali ulteriormente suddivisi in due sottosectori.

I Settore

Questo settore, che comprende tutto il versante meridionale e parte di quelli occidentale ed orientale esteso, come è, dal cono vulcanico sino alla costa tra Torre Annunziata e Portici, è quello caratterizzato dal grado maggiore di Pericolosità vulcanica potenziale.

E' in esso, infatti, che si sono riversati, in virtù dell'ostacolo morfologico rappresentato dall'antico recinto calderico del Somma a nord e ad est, tutti i flussi lavici emessi nell'intervallo 79 d.C.-1944.

L'area maggiormente invasa dalle lave, e che materializza il sottosettore I A ad altissima pericolosità, è quella, grosso modo a monte dell'isoipsa dei 300 m, entro la quale, peraltro, si è aperto il numero maggiore di bocche eruttive secondarie che hanno emesso flussi lavici indipendenti dal cratere centrale (ad esempio, le bocche del 1906) ovvero hanno costituito cupole di ristagno (come Colle Umberto nel 1895-1899).

Quest'area, che rappresenta il luogo a più alta probabilità di invasione ad opera di colate laviche e di apertura di bocche secondarie in caso di eruzioni con caratteristiche effusive o miste, e che è quella maggiormente esposta alla caduta di proietti di ogni dimensione, è caratterizzata anche dalla possibilità che si accumulino gli spessori più rilevanti di ceneri e lapilli nel corso delle eruzioni-quali quelle stromboliane-a più bassa energia. L'area in esame ha anche subito, particolarmente nel corso dell'ultimo millennio, il maggior numero di modificazioni nell'assetto morfologico e topografico a seguito di ciascun evento eruttivo.

L'area a valle dell'isoipsa dei 300 m si identifica con il sottosettore I B, caratterizzato anch'esso da un grado di pericolosità elevato, pure se inferiore rispetto a quello tipico del

sottosettore precedente. Questa è l'area invasa dai flussi lavici delle più importanti eruzioni effusive e miste del periodo 79 d.C.-1944, che hanno tratto origine tanto dal cratere centrale (ad esempio, le eruzioni del 1631 e del 1804-5-6) che da bocche eccentriche ricadenti nell'area, quali quelle medioevali del Viulo e quelle del 1760, del 1794 e del 1861.

Molti di tali flussi lavici sono giunti sino al mare operando, talora, profonde modificazioni nel disegno costiero (lave medioevali di Torre del Greco, lave del 1631, 1794, 1805). Bocche eccentriche di età protostorica sono presenti entro il territorio comunale di Torre del Greco (ad esempio i Camaldoli della Torre) e sul fondale marino antistante la costa torrese (come la bocca dei pescatori).

La frequenza con la quale i flussi lavici hanno interessato il sottosettore I B è certamente più bassa rispetto a quella caratteristica delle aree che ricadono in I A: la probabilità, quindi, che esso venga invaso da simili flussi lavici e dall'apertura di nuove bocche eccentriche è, ovviamente, minore e legata a grosse manifestazioni eruttive a tipologia marcatamente effusiva o mista. In quest'area si sono riversati anche i flussi piroclastici ed i *lahars* dell'eruzione pliniana del 79 d.C., che provocarono la distruzione pressoché totale dell'area, quelli dell'eruzione subpliniana del 472 e quelli del 1631; la probabilità che tali eventi possano ripetersi è sicuramente più bassa rispetto a quella relativa alla invasione ad opera di flussi lavici.

In quest'area si sono accumulati, anche se con spessori inferiori rispetto ad I A, livelli più o meno sottili di ceneri e lapilli delle eruzioni a bassa energia (stromboliane); essa è, inoltre, al di fuori delle aree interessate dalla caduta diretta dei proiettili lavici di maggiori dimensioni.

II Settore

Questo settore, suddivisibile anch'esso in due sottosettori, è caratterizzato da un grado di Pericolosità vulcanica potenziale che, in linea di massima, può essere definito di valore medio.

Esso racchiude, a nord e ad est, tutta la falda esterna del vecchio cono calderizzato del M. Somma; a sud ed a sudest si identifica nella stretta fascia pedemontana dell'edificio vesuviano tra Torre Annunziata e Terzigno; ad ovest si materializza con un'area che da mare giunge sin verso l'interno dell'abitato di S. Giorgio a Cremano; a sud ed a sudest, infine, corrisponde a lembi di fascia costiera tra Torre del Greco ed Ercolano.

Peculiarità del settore in esame risiede nel non essere, esso, stato sede, negli ultimi duemila anni, di bocche vulcaniche e nel non essere stato interessato che raramente da effusioni laviche di origine sia periferica che centrale.

L'analisi della storia eruttiva palesa come in questo settore si sia accumulata, nel corso dello stesso intervallo di tempo, la massima parte dei prodotti piroclastici da caduta (pomice, ceneri e lapilli) emessi dalle eruzioni (79 d.C.; 472; 1631) di maggiore intensità e come vi si siano deposte le colate piroclastiche con gli spessori maggiori.

Allo stesso modo, in questo settore si sono accumulati gli spessori maggiori di depositi da *lahars* derivanti da quegli eventi eruttivi (del pre-79 d.C. a Torre Bassano ed a S. Anastasia; del 79 d.C. ad Ercolano ed a Boscoreale; del 472 a Torre Annunziata; del 1631 a Pietrarsa ed a Boscoreale). In questo settore sono diffusissimi anche i prodotti da caduta (livelli di ceneri e scorie) delle eruzioni stromboliane, quali quelle verificatesi in epoca medioevale (ROSI & SANTACROCE, 1986; ARNO' et alii, 1987; ROLANDI &

RUSSO, 1989; 1993).

Ulteriore elemento di pericolosità di questo settore risiede nella presenza di bocche vulcaniche eccentriche inattive, legate all'attività effusiva periferica del vecchio edificio del Somma. Esse (localizzate a Strocchioni, nei pressi di Ottaviano, nel Lago di Pollena e poco a nordovest di Torre Bassano), pur se inattive, rappresentano, comunque, luogo di potenziale riattivazione dell'attività eruttiva periferica.

Questo settore è stato suddiviso in due sottosettori, il primo dei quali (II C) rappresenta l'intera falda residua dell'antico edificio del Somma. Stanti le caratteristiche morfologiche, questo sottosettore non è stato percorso da flussi lavici da circa 17.000 anni e, verosimilmente, non lo sarà neanche nel corso delle prossime eruzioni effusive; tanto meno, esso sarà caratterizzato dall'apertura di bocche eruttive, essendovi documentate solamente due manifestazioni (peraltro fossili) subterminali (Strocchioni e Lago di Pollena), entrambe sicuramente antecedenti il 79 d.C.

In questo sottosettore, per contro, stanti le particolari condizioni meteorologiche, da sempre si sono accumulati, e con gli spessori massimi, i prodotti da caduta di tutte le eruzioni degli ultimi duemila anni che abbiano avuto caratteristiche esplosive, nonché i prodotti di alcune colate piroclastiche, da *base surges* e, particolarmente, da *lahars*.

Sembra, pertanto, altamente probabile che una tale condizione, per eruzioni a carattere esplosivo di qualsiasi energia, possa riproporsi: conseguenzialmente, è da ritenersi che il grado di pericolosità di questo sottosettore sia medio-alto.

L'altro sottosettore (II D) si identifica, in parte, nelle due strette fasce pedemontane, sudorientale ed occidentale, dell'edificio vesuviano, che fungono da chiaro elemento morfologico di transizione tra la falda dell'edificio vulcanico e la pianura circostante. Altri due lembi sono localizzati lungo la fascia costiera, a Torre del Greco e ad Ercolano, ove sono diffusamente presenti i prodotti (specialmente quelli da flusso piroclastico e da *lahar*) dell'eruzione pliniana del 79 d.C. ed il fronte più avanzato delle colate laviche (medioevale, 1631, 1794, 1805) che si sono spinte sino alla costa, in occasioni di forti eruzioni con carattere effusivo.

Sembra molto poco probabile che prossime eruzioni effusive, se non della medesima entità ed importanza, possano interessare queste zone, stante la loro posizione estremamente distale a fronte degli attuali centri di emissione. Analoghe considerazioni possono valere per le altre due zone di questo settore che sono state raggiunte solo sporadicamente da flussi lavici in questi ultimi duemila anni (lave del 1764 a Boscoreale e del 1834 e 1929 a Terzigno).

In questo sottosettore non sono documentate bocche eruttive periferiche, se non quelle presenti lungo il litorale a nordovest di Torre Bassano, di età sicuramente antecedente il 79 d.C.

Pur se in misura minore rispetto al II C, sono documentati livelli cineritici e scoriacei da caduta, connessi alle eruzioni di più modesta esplosività (stromboliane), come quelle di età medioevale e del 1906; i depositi da *lahars* del 472 e del 1631 raggiungono qui i loro spessori massimi, ma la loro frequenza è tutt'altro che elevata.

Il sottosettore II D è caratterizzato dal grado maggiore di potenziale modificazione conseguenziale al livellamento che subisce la superficie topografica, quando è interessata da sporadiche colate laviche e/o torrentizie legate alle eruzioni vulcaniche di maggiore importanza.

Le aree racchiuse entro II D possono ritenersi come caratterizzate da un grado di pe-

ricolosità medio-basso, essendo state interessate solo marginalmente dal complesso dell'attività eruttiva di questi ultimi due millenni, ed essendo presumibile che un tale *status* continui anche nell'immediato futuro, in assenza, ovviamente, di eruzioni pliniane.

III Settore

Questo settore, che non presenta ulteriori suddivisioni, stante l'omogeneità delle caratteristiche, materializza la porzione di pianura che circonda, da tre lati, l'intero edificio vulcanico del Somma-Vesuvio.

Non sono presenti le colate laviche e le bocche eruttive relative agli ultimi duemila anni di attività, ma solo quelle (Pompei, Castello di Cisterna) dell'attività pre-79 d.C. del vecchio edificio vulcanico del Somma. Solo i prodotti delle grandi eruzioni pliniane (come quelli da caduta del 79 d.C.) hanno interessato questo settore, operando, talora, modificazioni non sostanziali del territorio: la loro frequenza, a tempi brevi, non è, certamente, da ritenersi elevata. Più frequenti sono, invece, i prodotti da caduta (pomici e ceneri) di eruzioni di media esplosività (quali quelle del 472 e del 1631) o di grandi eruzioni stromboliane (p. es. quella del 1906); gli spessori non sono, tuttavia, raffrontabili con quelli presenti negli altri settori. Solo localmente vi si è spinto, lasciando depositi di ridottissimo spessore, qualche episodio di colata piroclastica o torrentizia connesso a grandi eruzioni.

Nel complesso, questo settore si caratterizza per il grado di pericolosità vulcanica potenziale più basso: e ciò perchè esso ha registrato, salvo locali e non sostanziali episodi, sempre il medesimo *status* durante gli ultimi duemila anni di attività eruttiva, fatti salvi - ovviamente - gli episodi connessi ad eruzioni pliniane: è, pertanto, verosimile che possa continuare ad essere, anche in occasione di future eruzioni, interessato dai soli prodotti da caduta.

3. CONSIDERAZIONI SUL CLIMA DELL'AREA VESUVIANA

Il clima della regione vesuviana è piuttosto mite per larga parte dell'anno.

La temperatura media annua si aggira intorno ai 15-16 gradi e la temperatura minima assoluta, osservata durante circa 40 anni, al livello del mare, è di -4,8 gradi (BOTTINI, 1932). Non rilevanti sono le variazioni di temperatura (escursioni termiche diurne e stagionali). Le tabelle 1 e 2 graficizzano alcuni tra gli elementi più significativi a tal proposito (MENNELLA, 1973).

Nel periodo invernale, i venti dominanti sono essenzialmente quelli provenienti da settentrione, mentre per il resto dell'anno prevalgono quelli da mezzogiorno e da ponente.

La piovosità annua, misurata alla sommità del cratere, è di circa 1300 mm, mentre quella misurata all'Osservatorio Vesuviano, 612 m s.l.m., è di 1000 mm con 91 giorni di piovosità addensati nel periodo Ottobre-Marzo.

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Anno	Esc. ann.
Oss. vesuv.	5,8	5,9	8,3	11,0	14,5	19,1	21,7	21,5	18,8	14,5	10,5	7,0	13,2	15,9

Tab.1 - Temperature medie mensili ed annue dell'aria ed escursione media annua nel trentennio 1926-1955 all'Osservatorio vesuviano (q. 612 m s.l.m.) (MENNELLA, 1973).

E' interessante osservare come, secondo i dati pluviometrici raccolti dall'Osservatorio Vesuviano nel cinquantennio che va dal 1863 al 1913 (uno dei periodi di più intensa attività vulcanica del Vesuvio), la piovosità media annua sia stata di 749 mm circa con un massimo di 1619 mm nel 1907 (l'anno successivo alla grande eruzione dell' Aprile del 1906) ed un minimo di 332 mm nel 1909. Questi dati si discostano notevolmente non solo dalle attuali medie annuali, ma anche da quelle di quel periodo, che, misurate al cratere, diedero un valore di 1300 mm. MALLADRA (1914) interpretava tale anomalia come dovuta alla costante presenza di masse di aria calda ascendenti in relazione diretta con l'intensa attività di quel periodo.

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Esc. ann.
T. max. assol.	18,3	16,9	22,9	26,2	28,7	32,3	33,3	34,9	30,0	27,8	21,5	18,2	34,9
T. mass. med.	8,6	8,9	11,6	14,6	18,3	23,2	26,0	25,6	22,6	17,9	13,5	10,0	16,7
T. med. mens.	5,8	5,9	8,2	10,9	14,5	19,0	21,7	21,4	18,3	14,5	10,5	7,0	13,2
T. min. med.	3,1	2,9	4,9	7,3	10,6	14,9	17,4	17,3	15,1	11,1	7,6	4,0	9,7
T. min. assol.	-6,5	-8,5	-4,1	-1,8	3,5	7,0	10,5	11,0	7,7	2,1	-2,9	-6,5	-8,5
Esc. med. mens.	5,5	6,0	6,7	7,3	7,7	8,3	8,6	8,3	7,5	6,8	5,9	6,0	7,0

Tab.2 - Elementi relativi alle temperature registrate all'Osservatorio Vesuviano nell'ottantacinquennio 1866-1950 (MENNELLA, 1973).

L'umidità relativa nell'area vesuviana è pari a circa il 64% con rarissime brinate e grandinate casualmente presenti nel periodo autunnale e primaverile. Le nevi, quando si manifestano, interessano l'area del cratere vesuviano (altitudine 1281 m) e la parte alta della cinta calderica del Somma (altitudine 1132 m), e non persistono che qualche giorno.

L'area del Somma-Vesuvio rientra pienamente nel contesto degli ambienti climatici mediterranei subumidi: MAZZOLENI et alii (1989) riconoscono nel clima di quest'area un periodo di aridità circoscritto ai mesi estivi ed una ridotta incidenza di stress invernale da freddo (fig.1).

Per quel che attiene le leggi di pioggia, uno studio inedito del Provveditorato alle Opere Pubbliche per la Campania (finalizzato alla ricerca delle curve caratterizzate da "possibilità pluviometriche"), condotto elaborando con il metodo statistico del Fuller (FULLER, 1913) e per tempi di ritorno di un trentennio, i dati di pioggia raccolti dal Servizio Idrografico di Napoli a tutto il 1965, ha individuato - con accettabile approssimazione - tre distinte zone pluviometriche (A,B,C) in ognuna delle quali le precipitazioni potevano essere ricondotte ad una unica equazione del tipo:

$$h = (a + x H) T^n$$

con identici parametri a,x,n.

L'area vesuviana rientra nelle zone A e C (fig.2); in particolare, Torre del Greco, Torre Annunziata, Portici e Trecase ricadono nella seconda, mentre tutti gli altri abitati fanno parte della prima.

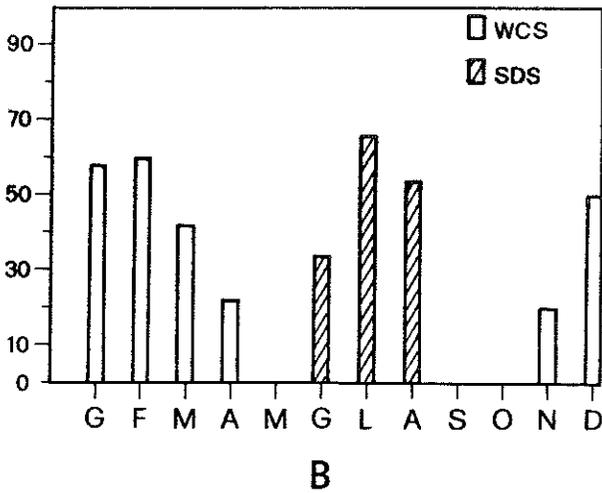
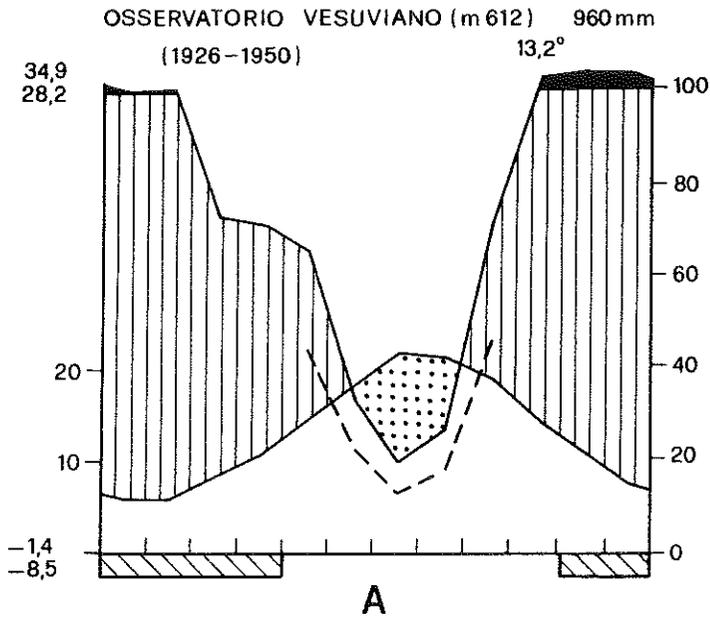


Fig.1 - Diagrammi pluvio-termici per la stazione dell'Osservatorio Vesuviano (da: MAZZOLENI & alii, 1989). (WCS=Winter Cold Stress; SDS=Summer Drought Stress).

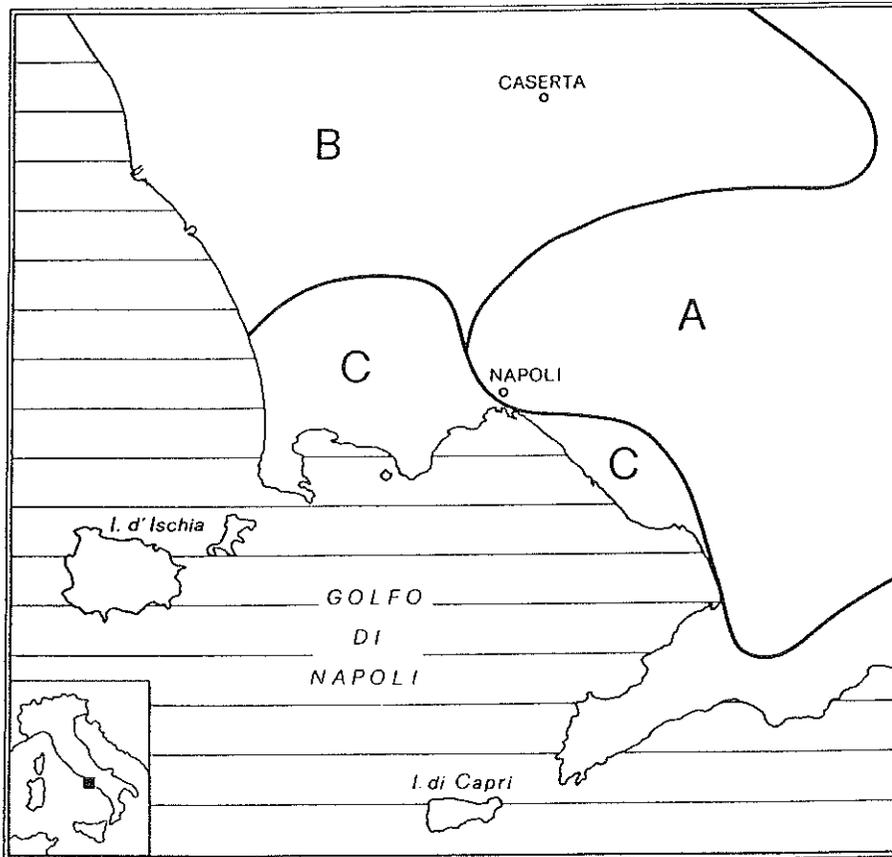


Fig. 2 - Zone pluviometriche dell'area napoletana.

Circa equivalente (23 contro 19) il numero dei bacini ricadenti nelle zone A e C; quelli che appartengono alla seconda sono contrassegnati con * nel quadro sinottico che è posto in calce a 4. Le equazioni regolarizzatrici sono:

$$\text{per la zona A) } h = (36+0.0215 H) T^{0.66}$$

$$\text{per la zona C) } h = (53+0.0375 H) T^{0.66}$$

nelle quali *h* esprime i millimetri di pioggia, *T* il tempo in ore, *H* l'altitudine in metri.

Di un certo interesse, infine, sono le notazioni di MENNELLA (1973) relative alla frequenza dei temporali, riferite a 44 anni di registrazioni effettuate dall'Osservatorio Vesuviano, i quali provengono nella generalità dei casi dai quadranti settentrionali. La tabella 3, che segue, visualizza medie mensili ed annuali.

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Anno
N. temporali senza grandine	2	1	4	5	8	34	16	19	32	35	11	14	181
N. temporali con grandine	4	8	10	6	6	5	9	3	5	10	8	22	96
Totale	6	9	14	11	14	39	25	22	37	45	19	36	277

Tab.3 - Numero dei temporali con e senza grandine (MENNELLA, 1973).

4. CONSIDERAZIONI SULL'ASSETTO MORFO-IDROGRAFICO DEL SOMMA-VESUVIO

Come è stato già evidenziato, il complesso vulcanico del Somma-Vesuvio è composto dal relitto calderizzato del Monte Somma (la cui altezza originaria, se si estrapolano i profili del relitto, è valutabile in 2000 metri circa) e dallo strato-vulcano più recente, il Vesuvio, cresciuto in posizione leggermente eccentrica rispetto al relitto del primo, del quale ha quasi interamente occupato, mascherandola, la porzione occidentale della depressione calderica.

Somma e Vesuvio sono separati lungo l'estensione dei settori orientale e settentrionale da una depressione intercalderica semilunata, la Valle del Gigante, aperta alle due estremità. I dati geovulcanologici palesano come il primo abbia terminato la sua attività eruttiva circa 17.000 anni fa, mentre il secondo, tuttora attivo, pare si sia accresciuto, sostanzialmente, durante questi ultimi 2000 anni circa (CATALANO, 1975); in particolare, la porzione sommitale del cono vesuviano risulta in gran parte acquisita durante l'ultima eruzione, quella del Marzo 1944 (BONASIA et alii, 1967), dopo le ripetute distruzioni e costruzioni che lo hanno interessato nel corso di questi ultimi tre secoli di attività vulcanica (NAZZARO, 1985).

La forma generale del complesso vulcanico, chiaramente bicipite alla sommità, è, all'incirca, tronco-conica con versanti interni notevolmente acclivi; la parte interna del versante calderico del Somma è subverticale e quello che costituisce la falda del cono vesuviano ha una acclività media del 53%.

I versanti esterni dell'edificio vulcanico, sebbene caratterizzati da differente grado di maturità e da ineguali caratteristiche morfologiche, sono, nel complesso, piuttosto acclivi e con marcato profilo concavo. Essi, con differente densità di drenaggio, sono solcati da numerose valli, variamente approfondite, che palesano, generalmente, profili evidenti quando sono incise nelle piroclastiti, o mostrano fondo piatto quando impostate su colate laviche o livelli tufacei particolarmente resistenti all'erosione. Ad eccezione del versante esterno del Monte Somma, l'intero apparato vesuviano presenta versanti giovanissimi che le manifestazioni eruttive, effusive ed esplosive, hanno sempre ricoperto con i loro prodotti, talvolta, addirittura, cancellando le precedenti linee di drenaggio, segnatamente quelle della porzione sommitale. Lungo il piedimonte costiero, per contro, solo alcune incisioni sono nitide, poichè solo raramente, nel corso di questo millennio, i prodotti vulcanici vesuviani vi sono giunti.

In questo settore, quindi, le linee di drenaggio riconoscibili risalgono all'epoca delle ultime manifestazioni eruttive vesuviane mentre lungo i versanti del Somma esse dovrebbero risalire al momento della cessazione dell'attività di questo strato-vulcano che, con la sua calderizzazione, ha presumibilmente troncato anche la sommità delle linee di dre-

naggio che, oggi, sembrano sostanzialmente decapitate della loro testata torrentizia.

Nonostante la presenza di alcune piccole emergenze sorgentizie sul versante del Somma, localizzate al passaggio tra i litotipi lavici e le piroclastiti fini (sorgenti Chianatelle ed Olivella) il clima particolare della regione rende sostanzialmente effimera la presenza dell'acqua nelle incisioni vallive, che sono praticamente asciutte per la maggior parte dell'anno ed attive solo in coincidenza dei periodi piovosi.

Procedendo dalla sommità del relitto calderizzato verso la pianura adiacente, si assiste ad una diminuzione sia delle pendenze che del potere erosivo dei corsi d'acqua le cui valli, strette, ripide e profonde, nella parte alta del versante (Valloni o Cupe), tendono, con l'allontanarsi dalla sommità, ad allargarsi ed a presentare fondi praticamente piatti con pareti vallive sempre meno acclivi e spartiacque svasati, talora indecisi, e che caratterizzano vere e proprie aree di interbacino, pressochè intatte, che rappresentano lembi della falda conica originaria. Anche le profondità delle valli tendono via via a ridursi fino ad annullarsi in superficie, dove prendono a costruire gli apici di piatti con alluvionali sui quali, spesso, i tratti vallivi sono pensili rispetto alla pianura circostante.

Vi è un vero e proprio "punto di intersezione" (HOOKE, 1967) tra i due tratti del versante a differente acclività: quello a monte, con pendenza media del 31%, e quello a valle, del 5%. I punti di intersezione sono ubicati lungo una fascia altimetrica costante, compresa tra le isoipse dei 200 e dei 300 metri, che marca anche la fascia di transizione tra il versante vulcanico ed il suo piedimonte. In corrispondenza di questa fascia altimetrica, si realizza anche il passaggio (non solo toponomastico) dai "Valloni" o "Cupe" ai "Lagni", che rappresentano i canali collettori delle incisioni lineari montane, la morfologia dei quali (canali larghi, poco profondi ed a fondo piatto) è stata, nel passato, responsabile delle frequenti esondazioni. Oggi essi sono totalmente regimentati, anche se versano in stato di abbandono. L'intera superficie drenante ha subito un'evoluzione piuttosto regolare; infatti, sono del tutto assenti segni che testimonino fasi di ringiovanimento, come la presenza di superfici terrazzate lungo gli alvei o gole di erosione. Le valli su tutta la superficie drenata hanno aspetto molto giovanile, sono regolari e ben definite, anche se il loro profilo trasversale risulta fortemente condizionato dagli affioramenti dei vari tipi litologici a diverso grado di erodibilità. Il *pattern* di drenaggio generale su tutto l'edificio vulcanico è di tipo radiale centrifugo e quasi tutte le valli possono considerarsi come conseguenti (in senso Davisiano). Tra i versanti dell'edificio vulcanico, quelli orientali e settentrionali sono pertinenti al Monte Somma, sul quale il reticolo idrografico ha un grado di maturità più elevato. Infatti, in questi settori, alcune incisioni conseguenti, un tempo indipendenti tra loro e quasi perfettamente parallele, sono divenute, per fenomeni di cattura, tributarie di corsi d'acqua più attivi, che hanno, così, ingrandito il loro bacino idrografico. Nonostante ciò, è ancora possibile parlare, per tutta l'area considerata, dell'esistenza di un reticolo parallelo. Si veda, a titolo di esempio, la configurazione dei Valloni a monte dei Lagni di Pollena e di Trocchia e di quelli a monte dei Lagni Rosario, S. Teresella e Zabatta.

I Lagni del settore orientale drenano le acque di piena verso i canali e gli alvei collettori che solcano la piana del Sarno; le acque vengono rallentate dalle vasche di laminazione e decantazione, non tutte funzionanti, poste lungo il percorso degli stessi. Per il settore settentrionale, invece, il recapito dei Lagni è rappresentato o da vasche di assorbimento o da collettori che si allacciano direttamente al sistema dei Regi Lagni, che attraversano longitudinalmente tutta la Pianura Campana per poi versarsi nel Mar Tirreno

poco prima di Mondragone. I Lagni del settore nordoccidentale (di Trocchia, Pollena e Cercola) si immettono nel grande collettore (Lagno di Ponticelli) che solca la piana ad oriente di Napoli sfociando in mare nei pressi di S. Giovanni a Teduccio.

I settori occidentale e meridionale dell'edificio vulcanico costituiscono le falde del giovane vulcano vesuviano: la superficie drenante, sebbene ampia, mostra una densità media di drenaggio molto bassa (0.5 Km/kmq) e totalmente in contrasto con quella sviluppata sui versanti del Monte Somma (circa 4 Km/kmq). Ciò deve essere imputato alla estrema giovinezza della superficie topografica interessata dal drenaggio che non ha conosciuto, tra un'eruzione e l'altra, un tempo sufficientemente lungo da permettere all'erosione lineare di incidere efficacemente la superficie ogni volta rinnovata. Tuttavia, anche in questi settori esistono, pure se estremamente localizzate, aree caratterizzate da elevata maturità morfologica e con reticolo idrografico ben sviluppato, paragonabile a quello presente sui fianchi del Somma. Queste aree, localizzate a nord-est di Torre del Greco (Cupa Vecchia Falanga) e nei dintorni del vecchio Osservatorio Vesuviano, rappresentano, sia in senso geologico che geomorfologico, i relitti meridionali dell'edificio calderizzato del Somma. Anche se poco sviluppato, il reticolo idrografico è presente pure sul versante vesuviano e, stante la notevole diffusione delle lave in affioramento, l'erosione lineare è assai poco accentuata, mentre è più sensibile a valle dove la presenza di piroclastiti-più facilmente erodibili-dà luogo a valli morfologicamente ben definite. Le aste fluviali hanno tutte un andamento nettamente radiale centrifugo e si presentano quasi perfettamente parallele tra loro; si è, quindi, in presenza di un reticolo idrografico con marcata tipologia conseguente (nel senso Davisiano). Non è ben definibile un vero e proprio piedimonte vulcanico, in quanto non sono rilevabili, lungo tutto il versante, sensibili, brusche rotture di pendenza, tali da innescare la rapida deposizione del carico solido trasportato dai corsi d'acqua, che sfociano quasi tutti direttamente a mare. Comunque, il versante vesuviano (settore occidentale e meridionale dell'intero edificio vulcanico) può essere scomposto in due zone, sommitale e basale, separate da una soglia morfologica che rappresenta la traccia, solo in parte affiorante, del relitto calderico del Somma (il Piano delle Ginestre). Quella sommitale, a monte di detto Piano, è caratterizzata dalla presenza delle falde che racchiudono il gran cono vesuviano con una pendenza media del 40%; quella basale, a valle del Piano delle Ginestre, con una pendenza media del 15%, rappresenta la zona di scorrimento dei prodotti lavici e piroclastici delle eruzioni più importanti di questi ultimi due millenni. Nella zona sommitale manca un drenaggio ben definito perchè i versanti sono troppo brevi, troppo acclivi e le piroclastiti sciolte molto permeabili. Sulle zone relativamente subpianeggianti, il Piano delle Ginestre e la stessa Valle del Gigante, lo scorrimento delle acque è praticamente assente. La zona basale, invece, caratterizzata da valori della pendenza più bassi (che restano, comunque, alti a fronte di quelli dell'omologo versante pedemontano del Somma) presenta aste valliche parallele tra loro e con andamento centrifugo radiale, generalmente impostate su colate laviche, e caratterizzate da ampie testate; là dove incontrano - o si impostano su - piroclastiti, presentano testate strette ed allungate con valli a V ben definite. I canali sono molto prossimi gli uni agli altri e mostrano pochi ed insignificanti tributari; ciò può essere spiegato con le pendenze molto forti che caratterizzano tale versante. Situazioni morfoidrografiche più o meno analoghe a quella descritta sono documentate anche in altre aree vulcaniche italiane (quali il Vulcano Laziale: CAPUTO et alii, 1974).

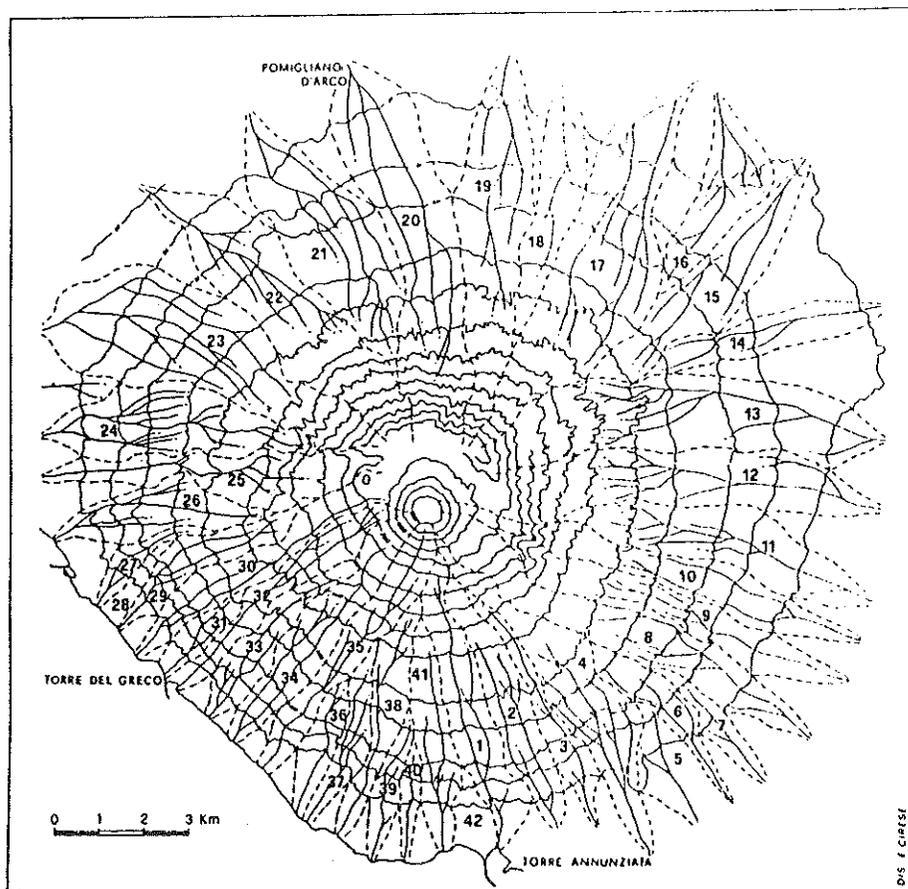


Fig. 3 - Carta del reticolo idrografico superficiale del complesso Somma-Vesuvio.

La "Carta del reticolo idrografico" (fig. 3) illustra, in maniera schematica, la disposizione e l'andamento del *pattern* drenante sul Somma-Vesuvio; sono stati delimitati, a tal fine, 42 bacini idrografici quasi simmetricamente distribuiti sulle due falde del complesso vulcanico. Di questi, i bacini individuati con numeri dal 10 al 23 sono pertinenti al Somma; quelli dal 9 al 24 interessano il versante vesuviano. Tra questi è possibile una rapida comparazione morfometrica. Quelli relativi al Somma presentano, generalmente, dimensioni maggiori rispetto a quelli, più stretti ed allungati, che caratterizzano la falda vesuviana. Oltre alla maggiore densità di drenaggio, i bacini sommani presentano tutti recapiti presso collettori ubicati lungo la pianura adiacente. I bacini vesuviani, a più scarsa densità di drenaggio, presentano quasi tutti un recapito direttamente a mare. L'analisi ipso-metrica, condotta su tutti i bacini idrografici dell'edificio vulcanico, ha evidenziato che per quelli relativi al Somma esiste una curva ad andamento regolare, con tipica concavità rivolta verso l'alto, in accordo con il profilo, spiccatamente concavo, del versante sommano, che deve aver favorito non poco l'attuale conformazione del profilo longitudinale dei corsi d'acqua, e che, quindi, non si configura interamente come un profilo d'erosione, potendo essere, in parte, l'effetto di un caso di "convergenza morfologica". Differente

BACINO	1*	2*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Area di drenaggio (Kmq)	4.77	3.99	2.33	6.63	3.13	2.16	1.38	7.86	5.14	5.96	6.71	9.34	11.9	3.44
Lungh. asta principale (Km)	6.45	5.77	5.5	8.6	2.62	4.25	2.62	8.5	8.25	9.37	6.6	8.5	9.65	5.2
Somma lungh. aste (Km)	18.3	12.9	8.5	28.1	3.47	18.6	4.37	28.5	19.2	21.2	24.2	35.5	45.7	9.12
Densità di drenaggio	3.85	3.24	3.65	4.24	1.11	4.39	3.16	3.62	3.74	3.55	3.61	3.81	3.84	2.69
Frequenza di drenaggio	2.93	3	1.71	3.47	0.76	2.77	2.89	2.56	2.61	2.68	3.43	3.21	4.45	1.45
Coef. di drenaggio	0.26	0.31	0.27	0.23	0.89	0.22	0.31	0.27	0.26	0.28	0.28	0.26	0.26	0.37
Altitudine media	180	180	130	140	30	50	50	150	100	120	90	150	140	70
Fattore di forma	12.5	10.2	3.22	2.97	1.44	2.57	2	2.7	3.29	3.41	2.27	2.47	2.49	2.49
Tempo di corvazione	1.71	1.55	1.57	2.45	2.51	2.16	1.52	2.4	2.67	2.72	2.67	2.55	2.99	2.27
Altezza di pioggia	84.8	79.5	53.7	70.2	67	61.5	48.6	70.6	72.9	74.5	72.4	72.6	80.4	64.1
Portata (mc/sec)	49	42.4	16.5	39.4	17.3	12.7	9.16	47	29	33.9	37.8	55.2	68.4	20.1

BACINO	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26*	27*	28*
Area di drenaggio (Kmq)	6.08	4.38	13	3.77	8.8	13.8	10.4	10.8	13.7	7.06	5.81	3.26	0.85	0.71
Lungh. asta principale (Km)	6.32	4.6	9.42	6.15	9.37	8.9	7.5	8.37	8.47	6.32	8.3	4.95	3.22	2.25
Somma lungh. aste (Km)	17.4	13.7	59.4	14.7	37.6	41.9	38.9	50.2	50	31.2	24.1	15.1	5.15	2.25
Densità di drenaggio	2.86	3.12	4.55	3.9	4.27	3.04	3.74	4.63	3.64	4.42	4.15	4.62	6.07	3.13
Frequenza di drenaggio	0.98	2.51	3.68	2.38	4.09	2.83	2.69	4.61	2.98	3.4	3.95	3.99	5.9	1.4
Coef. di drenaggio	0.35	0.32	0.22	0.25	0.23	0.33	0.27	0.21	0.27	0.22	0.24	0.21	0.16	0.31
Altitudine media	80	60	125	75	110	120	105	150	90	100	270	110	75	50
Fattore di forma	2.28	1.95	2.32	2.82	2.81	2.13	2.07	2.26	2.03	2.11	1.27	2.44	3.11	2.38
Tempo di corvazione	2.71	2.46	3.19	2.45	3.08	3.21	2.07	2.62	3.62	2.51	1.68	1.74	1.22	1.19
Altezza di pioggia	72.4	67.5	83.2	67.7	80.6	82.8	77.6	74	88.4	69.8	58.5	79.7	63.6	61.5
Portata (mc/sec)	33.8	24.8	70.4	19.9	47.6	73.7	56.9	63.5	69.5	40.7	42	30.9	9.1	7.65

BACINO	29*	30*	31*	32*	33*	34*	35*	36*	37*	38*	39*	40*	41*	42*
Area di drenaggio (Kmq)	2.42	4	1	3.33	3.05	4.54	5.03	1.85	2.16	2.92	1.4	0.83	3.21	1.12
Lungh. asta principale (Km)	4.12	7.25	2.75	6	4.6	5.8	6.9	2.67	3.75	5.75	3.25	2.3	5	1.75
Somma lungh. aste (Km)	14.1	18.8	4	13.5	13.1	18.5	22.7	6.74	9	15	7.5	3.55	11	3.22
Densità di drenaggio	5.83	4.78	4	4.05	4.3	4.1	4.5	3.64	4.16	5.13	5.35	4.27	3.44	2.79
Frequenza di drenaggio	4.13	3.75	2	2.1	4	3.1	3.6	2.7	3.24	5.09	3.57	1.2	2.18	1.78
Coef. di drenaggio	0.17	0.21	0.25	0.24	0.23	0.24	0.22	0.27	0.24	0.19	0.19	0.23	0.29	0.35
Altitudine media	180	2.7	70	370	100	250	260	60	100	165	60	50	140	30
Fattore di forma	2.36	3.22	2.44	2.92	2.34	2.42	2.74	1.71	2.27	3	2.44	2.24	2.5	1.47
Tempo di corvazione	1.52	1.45	1.21	1.05	1.73	1.36	1.47	1.51	1.43	1.5	1.55	1.25	1.54	1.56
Altezza di pioggia	78.3	79.9	62.8	68.8	81.1	76.1	81.6	72.5	69.5	73.5	73.8	63.6	77.5	72.6
Portata (mc/sec)	27.2	45.4	10.7	44.8	29.6	52.6	56.8	19.5	21.7	29.6	13.8	8.74	33.3	10.8

Tab. 4 - Parametri morfometrici ed idrologici dei bacini imbriferi dell'area del Somma-Vesuvio.

configurazione mostra, invece, la curva ipsografica di alcuni bacini del versante vesuviano, relativamente ai quali un evidente punto di flesso permette di scomporre la curva in due porzioni, quasi perfettamente sovrapponibili, e con la concavità rivolta verso l'alto. Questa situazione è tipica di corsi d'acqua non in equilibrio con il profilo del versante. In particolare, il punto di flesso nelle curve è dovuto alla presenza del gradino morfologico (il Piano delle Ginestre), costituito dal relitto calderizzato del Somma. Configurazioni simili sono frequenti anche nei bacini idrografici di altre aree vulcaniche italiane (CAPUTO et alii, 1974; CICCACCI et alii, 1988).

In calce a questo capitolo, sono riportate le tabelle ipsometriche e talune curve ipsografiche⁽¹⁾ che recano, in ascissa, l'area in percento ed in ordinata l'altitudine, in migliaia di metri.

4.1. Caratteristiche morfometriche ed idrologiche dei bacini⁽²⁾

I parametri morfometrici ed idrologici che concorrono a determinare il quadro reologico dei bacini idrografici, sono riportati in tab. 4. Tra questi sono stati considerati:

a) l'area, la densità, il coefficiente e la frequenza di drenaggio (DRAMIS & GENTILI, 1976) ed il fattore di forma;

b) l'altitudine media del bacino idrografico, espressa mediante la curva ipsometrica che consente di determinare l'estensione del bacino sopra (o sotto) una determinata quota. Essa coincide con le ordinate corrispondenti all'ascissa del 50 %.

Tra gli elementi idrologici è stato valutato il tempo di corrivazione T_c , che è quello impiegato dalle acque meteoriche per raggiungere una sezione considerata, partendo dai punti più lontani del bacino. Il suo valore, a parità di caratteristiche dell'evento piovoso, dipende dalla natura dei terreni, dalla morfologia e pendenza del bacino e dalla vegetazione. Per la sua determinazione è stata utilizzata la formula di Giandotti (GIANDOTTI, 1937; IPPOLITO, 1977)

$$T_c = 4 \sqrt{A} + 1.5L / 0.8 \sqrt{H_m}$$

dove A è la superficie del bacino in kmq, L la lunghezza del corso principale in chilometri, ed H_m è l'altitudine media, in metri, del bacino rispetto alla sezione considerata.

Per la valutazione della portata massima della sezione di sbocco è stata utilizzata la formula empirica di Giandotti assumendo, per ogni bacino, un tempo di pioggia pari a quello di corrivazione e calcolando, su tale base, l'altezza di pioggia.

Allo scopo di verificare i valori ottenuti con la formula del Giandotti, per alcuni bacini campione (8, 17, 19, 30, 35) le portate di piena sono state calcolate anche con il metodo della corrivazione. A tal fine, si è utilizzata la formula di Fantoli (FANTOLI, 1913; SUPINO, 1965) per valutare il coefficiente di afflusso che si suppone, per semplificazione, costante:

$$\Phi = \mu \quad t^{1/3} \quad i^{1/3}$$

⁽¹⁾ Tali curve sono state elaborate graficamente dal Dott. Mario Ardolino, dell'Amm.ne Prov. di Napoli, che si ringrazia per questo.

⁽²⁾ Questo paragrafo è stato curato interamente dall'Ing. Cosimo Granata che si è avvalso della collaborazione dei Dott. A. Lalli e M. Ardolino.

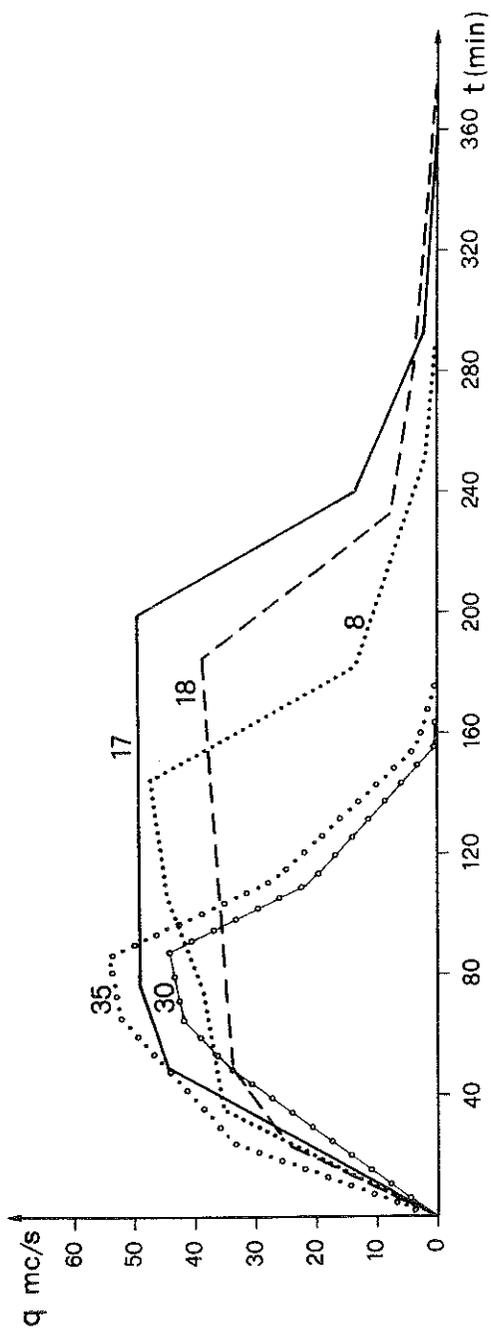


Fig. 4 - Diagrammi portata - tempo relativi ai bacini contrassegnati dal numero che accompagna le curve .

dove t è il tempo ed i l'intensità di pioggia.

Il valore di μ tiene conto delle caratteristiche di assorbimento dei terreni ed è stato assunto pari a 0.50 per i bacini della falda del Somma ed a 0.65 per quelli del versante vesuviano.

Per la valutazione delle portate, si è utilizzata la formula generale:

$$Q = \Phi i A$$

Posto, quindi, il tempo di pioggia pari a quello di corrivazione, si è calcolato il valore della portata; la pioggia corrispondente alla portata massima viene definita critica.

Per ogni bacino (ad essi si riferisce il numero che accompagna alcune curve) è stato tracciato anche il diagramma portate-tempo; la figura 4 ne riporta alcuni esempi significativi. Il procedimento è affetto da un ampio margine di approssimazione, data l'ovvia impraticabilità delle necessarie sperimentazioni.

Per quanto riguarda il tempo di corrivazione, infine, è da ricordare come esso non si mantenga costante, poichè la lama d'acqua a diverse altezze nel canale assume velocità e comportamenti idraulici differenti.

Le portate specifiche sono dell'ordine di circa 10 mc/sec/kmq per i bacini della falda meridionale, essendo un tale valore legato sia alla diversa intensità delle precipitazioni, sia ai tempi di corrivazione, più ristretti, e sia al maggior valore del coefficiente di afflusso (deflusso superficiale).

L'andamento delle portate rispetto ai tempi, conseguentemente, mostra come le portate di piena si verifichino per tempi di pioggia brevi e decrescano rapidamente, essendo "concentrate" intorno al valore del tempo di corrivazione.

Per i bacini della falda settentrionale, le portate specifiche sono dell'ordine di circa 5 mc/sec/kmq, sia per la minore intensità delle precipitazioni, sia per i tempi di corrivazione più lunghi e sia per il minor valore del coefficiente di afflusso.

Bacino n°3

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.04	1.58	1.58
500-400	0.01	5.49	7.07
400-300	0.22	9.43	16.50
300-200	0.41	17.56	34.86
200-100	0.53	22.69	56.75
100-50	0.75	32.12	88.87
50-25	0.26	11.13	100
	2.33	100	

Bacino n°6

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.87	40.27	40.27
100-75	0.51	23.62	63.89
75-50	0.52	24.08	87.97
50-25	0.26	12.03	100
	2.16	100	

Bacino n°2

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	0.01	0.31	0.31
700-600	0.10	24.40	2.75
600-500	0.19	4.76	7.51
500-400	0.20	5.02	12.53
400-300	0.40	10.02	22.55
300-200	0.86	21.55	44.10
200-100	1.34	33.59	77.69
100-50	0.64	16.05	93.74
50-25	0.25	6.26	100
	3.99	100	

Bacino n°5

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	=	=	=
100-75	0.09	3.00	3.00
75-50	0.55	17.55	20.55
50-25	2.49	79.45	100
	3.13	100	

Bacino n°1

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	0.04	0.84	0.84
800-700	0.09	1.97	2.81
700-600	0.23	4.72	7.53
600-500	0.25	5.24	12.77
500-400	0.29	6.09	18.86
400-300	0.41	8.59	27.45
300-200	0.87	18.24	45.69
200-100	1.37	28.73	74.42
100-50	0.75	15.72	90.14
50-0	0.47	9.86	100
	4.77	100	

Bacino n°4

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	0.01	0.11	0.11
1000-900	0.03	0.49	0.60
900-800	0.07	1.11	1.71
800-700	0.08	1.20	2.91
700-600	0.12	1.82	4.73
600-500	0.13	1.89	6.62
500-400	0.16	2.42	9.04
400-300	0.37	5.58	14.62
300-200	1.40	21.13	35.75
200-100	1.56	23.52	59.27
100-50	1.79	27.00	86.27
50-25	0.91	13.73	100
	6.63	100	

Bacino n°9

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	0.06	1.17	1.17
700-600	0.06	1.17	2.34
600-500	0.13	2.53	4.87
500-400	0.20	3.89	8.76
400-300	0.32	6.23	14.99
300-200	0.76	14.78	29.77
200-100	1.20	23.34	53.11
100-75	0.54	10.60	63.61
75-50	0.87	16.93	80.54
50-25	1.00	19.46	100
	5.14	100	

Bacino n°12

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	0.32	3.43	3.43
700-600	0.29	3.10	6.53
600-500	0.32	3.43	9.96
500-400	0.51	5.46	15.42
400-300	0.87	9.31	24.73
300-200	1.20	12.85	37.58
200-100	2.46	26.34	63.92
100-75	1.25	13.38	77.30
75-50	1.29	13.81	91.11
50-30	0.83	8.89	100
	9.34	100	

Bacino n°8

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	0.09	1.10	1.10
1100-1000	0.10	1.27	2.37
1000-900	0.16	2.03	4.40
900-800	0.45	5.73	10.13
800-700	0.35	4.45	14.58
700-600	0.26	3.30	17.88
600-500	0.21	2.68	20.56
500-400	0.31	3.94	24.56
400-300	0.42	5.30	29.80
300-200	0.65	8.26	38.06
200-100	2.18	27.74	65.80
100-75	0.76	9.66	75.46
75-50	1.13	14.37	89.83
50-25	0.80	10.17	100
	7.86	100	

Bacino n°11

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	0.09	1.34	1.34
300-200	0.70	10.43	11.77
200-100	2.18	32.49	44.26
100-75	1.15	17.14	61.40
75-50	1.56	23.25	84.65
50-0	1.03	15.35	100
	6.71	100	

Bacino n°7

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	=	=	=
100-75	0.11	7.97	7.97
75-50	0.46	33.34	41.31
50-25	0.81	58.69	100
	1.38	100	

Bacino n°10

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	0.04	0.67	0.67
1100-1000	0.06	1.01	1.68
1000-900	0.09	1.51	3.19
900-800	0.12	2.01	5.20
800-700	0.14	2.35	7.55
700-600	0.07	1.17	8.72
600-500	0.09	1.51	10.23
500-400	0.17	2.85	13.08
400-300	0.32	5.37	18.45
300-200	0.62	10.40	28.85
200-100	1.41	23.66	52.51
100-75	0.72	12.08	64.59
75-50	1.17	19.64	84.23
50-25	0.94	15.77	100
	5.96	100	

Bacino n°27

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	0.02	2.72	2.72
200-100	0.24	28.30	31.02
100-75	0.14	16.74	47.76
75-50	0.23	26.54	74.30
50-0	0.22	25.70	100
	0.84	100	

Bacino n°30

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	0.04	0.92	0.92
1100-1000	0.04	1.09	2.01
1000-900	0.06	1.52	3.53
900-800	0.34	8.57	12.10
800-700	0.19	4.57	16.67
700-600	0.27	6.62	23.29
600-500	0.31	7.80	31.09
500-400	0.38	9.37	40.46
400-300	0.28	7.02	47.48
300-200	0.66	16.40	63.88
200-100	0.66	16.40	80.28
100-75	0.19	4.67	84.95
75-50	0.21	7.25	92.20
50-0	0.31	7.80	100
	3.93	100	

Bacino n°26

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	0.16	4.87	4.87
300-200	0.49	15.06	19.93
200-100	1.27	38.92	58.85
100-75	0.56	16.07	74.92
75-50	0.44	13.39	88.31
50-0	0.38	11.69	100
	3.26	100	

Bacino n°29

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.03	1.28	1.28
500-400	0.23	9.65	10.93
400-300	0.25	10.31	21.24
300-200	0.50	20.63	41.87
200-100	0.75	30.94	72.81
100-75	0.16	6.93	79.74
75-50	0.22	8.99	88.74
50-0	0.27	11.28	100
	2.42	100	

Bacino n°25

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	0.28	4.82	4.82
700-600	0.37	6.37	11.19
600-500	0.79	13.60	24.79
500-400	0.51	8.78	33.57
400-300	0.73	12.56	46.13
300-200	1.19	20.48	66.61
200-100	0.85	14.63	81.24
100-75	0.38	6.54	87.78
75-50	0.37	6.37	94.15
50-32	0.34	5.85	100
	5.81	100	

Bacino n°28

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.08	10.90	10.90
100-75	0.06	8.64	19.54
75-50	0.14	19.52	39.06
50-0	0.44	60.94	100
	0.72	100	

Bacino n°33

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.20	6.39	6.39
500-400	0.14	4.60	10.99
400-300	0.16	5.37	16.36
300-200	0.25	8.07	24.43
200-100	1.01	33.12	57.55
100-75	0.35	11.34	68.89
75-50	0.64	20.88	89.77
50-0	0.31	10.23	100
	3.05	100	

Bacino n°36

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.55	29.73	29.73
100-75	0.20	10.81	40.54
75-50	0.33	17.83	58.37
50-0	0.77	41.63	100
	1.85	100	

Bacino n°32

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	0.02	0.45	0.45
1000-900	0.03	0.92	1.37
900-800	0.14	4.19	5.56
800-700	0.19	5.60	11.16
700-600	0.30	9.00	20.16
600-500	0.55	16.73	33.89
500-400	0.34	10.27	47.16
400-300	0.21	6.30	53.46
300-200	0.44	13.09	66.55
200-100	0.50	14.99	81.54
100-75	0.14	4.19	85.75
75-50	0.13	3.75	89.48
50-0	0.35	10.52	100
	3.34	100	

Bacino n°35

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	0.08	1.59	1.59
1100-1000	0.10	1.99	3.58
1000-900	0.13	2.58	6.16
900-800	0.16	3.18	9.34
800-700	0.25	4.98	14.32
700-600	0.48	9.54	23.86
600-500	0.33	6.56	30.42
500-400	0.31	6.16	36.58
400-300	0.47	9.34	45.92
300-200	0.70	13.92	59.84
200-100	0.73	14.51	74.35
100-75	0.33	6.56	80.91
75-50	0.26	5.17	86.08
50-0	0.70	13.92	100
	5.03	100	

Bacino n°31

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.27	26.80	26.80
100-75	0.17	16.80	43.60
75-50	0.25	25.30	68.90
50-0	0.31	31.10	100
	1.00	100	

Bacino n°34

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	0.08	1.85	1.85
1100-1000	0.06	1.36	3.21
1000-900	0.11	2.48	5.67
900-800	0.16	3.56	9.27
800-700	0.21	4.54	13.76
700-600	0.26	7.87	21.63
600-500	0.23	5.16	26.79
500-400	0.30	6.60	33.39
400-300	0.37	8.16	41.55
300-200	0.69	15.12	56.67
200-100	1.09	24.00	80.67
100-75	0.28	6.17	86.84
75-50	0.33	7.15	93.99
50-0	0.27	6.01	100
	4.54	100	

Bacino n°15

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	0.29	4.77	4.77
200-100	2.02	33.22	37.99
100-75	1.29	21.22	59.21
75-50	2.48	40.79	100
50-0	6.08	100	

Bacino n°18

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	0.02	0.54	0.54
300-200	0.27	7.16	7.70
200-100	1.20	31.83	39.53
100-75	0.79	20.95	60.48
75-50	1.09	28.91	89.39
50-38	0.40	10.61	100
	3.77	100	

Bacino n°14

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.81	23.55	23.55
100-75	0.57	16.57	40.12
75-50	2.06	59.88	100
	3.44	100	

Bacino n°17

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	0.08	0.62	0.62
900-800	0.09	0.69	1.31
800-700	0.12	0.92	2.23
700-600	0.26	1.99	4.22
600-500	0.30	2.30	6.52
500-400	0.42	3.22	9.74
400-300	0.86	6.59	16.33
300-200	1.54	11.81	28.14
200-100	4.54	34.82	62.96
100-75	1.44	11.04	74.00
75-50	1.60	12.27	86.77
50-34	1.79	13.73	100
	13.04	100	

Bacino n°13

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	0.15	1.26	1.26
900-800	0.19	1.59	2.85
800-700	0.18	1.51	4.37
700-600	0.38	3.19	7.55
600-500	0.37	3.10	10.65
500-400	0.54	4.53	15.18
400-300	0.89	7.47	22.65
300-200	1.43	12.01	34.68
200-100	3.25	27.29	61.95
100-75	1.50	12.60	74.55
75-50	2.14	17.98	92.53
50-30	0.89	7.47	100
	11.91	100	

Bacino n°16

Intervallo m	Area Km ²	% cum	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.12	2.74	2.74
100-75	0.54	12.33	15.07
75-50	2.17	49.54	64.61
50-36	1.55	35.39	100
	4.38	100	

Bacino n°21

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.02	0.19	0.19
500-400	0.04	0.39	0.57
400-300	0.22	2.12	2.69
300-200	1.40	13.45	16.14
200-100	3.88	37.27	53.41
100-75	1.50	14.41	67.82
75-50	2.42	23.25	91.07
50-40	0.93	8.93	100
	10.41	100	

Bacino n°24

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.03	0.42	0.42
500-400	0.14	1.92	2.34
400-300	0.33	4.68	7.02
300-200	1.13	16.01	23.03
200-100	2.64	37.39	60.42
100-75	0.98	13.60	74.02
75-50	1.25	17.70	91.72
50-32	0.58	8.22	100
	7.06	100	

Bacino n°20

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	0.25	1.82	1.82
900-800	0.30	2.18	4.00
800-700	0.33	2.40	6.40
700-600	0.45	3.27	9.67
600-500	0.47	3.41	13.08
500-400	0.64	4.65	17.73
400-300	0.94	6.82	24.55
300-200	1.31	9.51	34.06
200-100	3.05	22.15	56.21
100-75	1.53	11.11	67.32
75-50	12.60	18.88	86.20
50-36	1.90	13.80	100
	13.77	100	

Bacino n°23

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	0.09	0.66	0.66
800-700	0.16	1.18	1.82
700-600	0.29	2.11	3.93
600-500	0.37	2.69	6.69
500-400	0.38	2.77	9.39
400-300	0.49	3.57	12.96
300-200	1.15	8.37	21.33
200-100	3.40	24.74	46.07
100-75	1.84	13.39	59.46
75-50	2.41	17.54	77.00
50-25	3.16	23.00	100
	13.74	100	

Bacino n°19

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	0.05	0.58	0.58
900-800	0.09	1.02	1.60
800-700	0.12	1.36	2.96
700-600	0.15	1.70	4.46
600-500	0.18	2.04	6.70
500-400	0.32	3.64	10.34
400-300	0.60	6.82	17.16
300-200	0.93	9.43	26.59
200-100	2.58	29.32	55.91
100-75	1.40	15.91	71.82
75-50	1.82	20.68	92.50
50-36	0.66	7.50	100
	8.80	100	

Bacino n°22

Intervallo m	Area Km ²	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	0.14	1.30	1.30
900-800	0.15	1.38	2.68
800-700	0.29	2.67	5.35
700-600	0.35	3.22	8.57
600-500	0.42	3.87	12.44
500-400	0.56	5.16	17.60
400-300	0.56	5.16	22.76
300-200	1.55	14.30	37.06
200-100	3.25	29.95	67.01
100-75	1.22	11.24	78.25
75-50	1.50	13.82	92.07
50-25	0.86	7.93	100
	10.85	100	

Bacino n°39

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.35	25.00	25.00
100-75	0.21	15.00	40.00
75-50	0.31	22.14	62.14
50-0	0.53	37.86	100
	1.40	100	

Bacino n°42

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	=	=	=
100-75	0.06	5.35	5.35
75-50	0.19	16.97	22.32
50-0	0.87	77.68	100
	1.12	100	

Bacino n°38

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	0.08	2.74	2.74
500-400	0.19	6.50	9.24
400-300	0.23	7.86	17.12
300-200	0.60	20.55	37.64
200-100	1.12	38.35	76.02
100-75	0.14	4.80	80.82
75-50	0.21	7.19	88.01
50-0	0.35	11.99	100
	2.92	100	

Bacino n°41

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	0.07	2.18	2.18
400-300	0.25	7.79	9.97
300-200	0.67	20.87	30.84
200-100	1.06	33.02	63.86
100-75	0.33	10.28	74.14
75-50	0.37	11.53	85.67
50-0	0.46	14.33	100
	3.21	100	

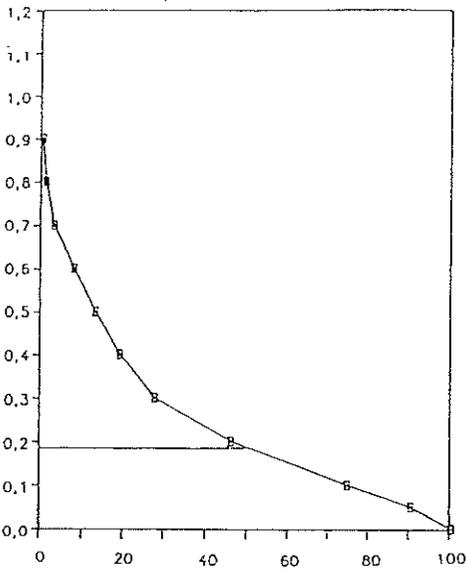
Bacino n°37

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	0.45	20.83	20.83
200-100	0.62	28.70	49.53
100-75	0.26	12.04	61.57
75-50	0.26	12.04	73.61
50-0	0.57	26.39	100
	2.16	100	

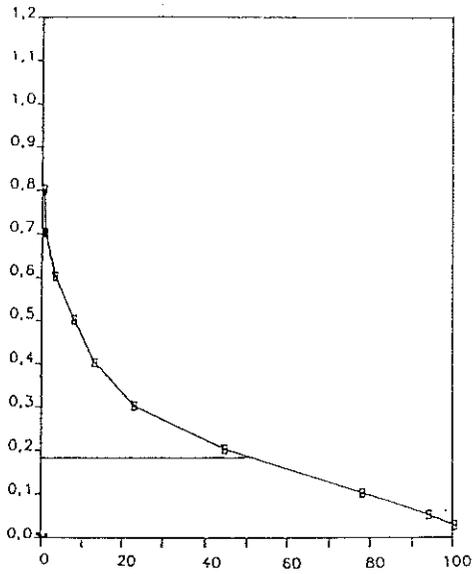
Bacino n°40

Intervallo m	Area Kmq	%	% cum
1200-1100	=	=	=
1100-1000	=	=	=
1000-900	=	=	=
900-800	=	=	=
800-700	=	=	=
700-600	=	=	=
600-500	=	=	=
500-400	=	=	=
400-300	=	=	=
300-200	=	=	=
200-100	0.12	14.45	14.45
100-75	0.14	16.87	31.32
75-50	0.21	25.30	56.62
50-0	0.36	43.38	100
	0.83	100	

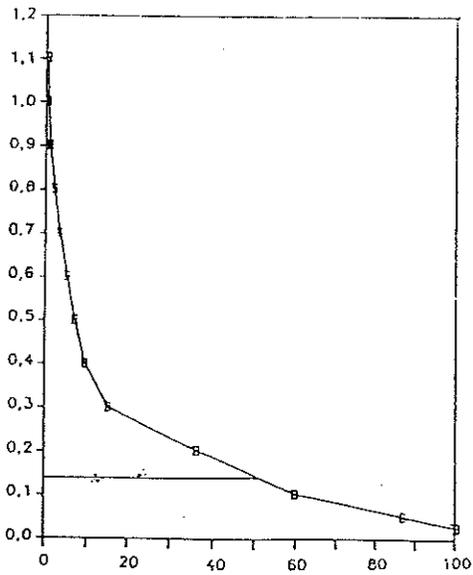
bacino n.1



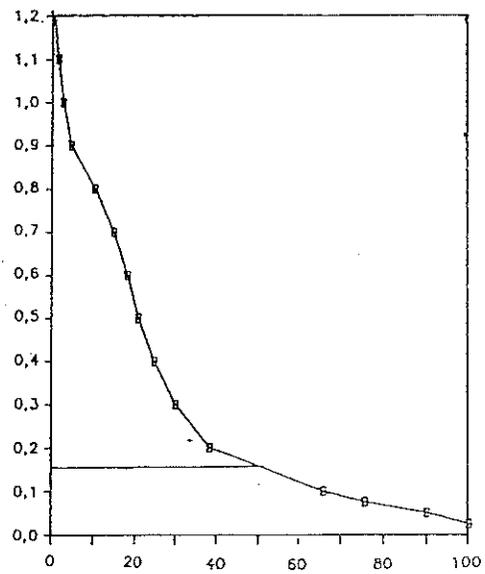
bacino n.2



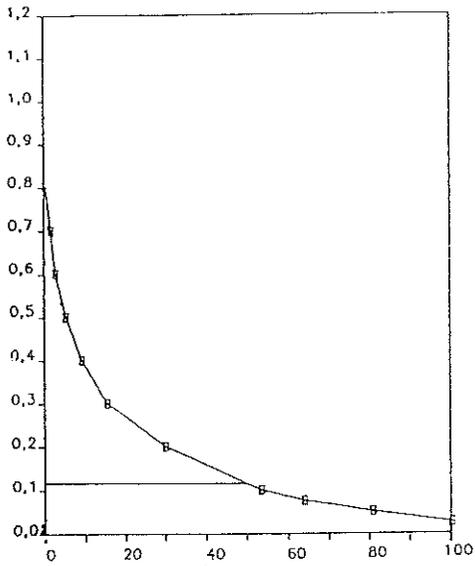
bacino n.4



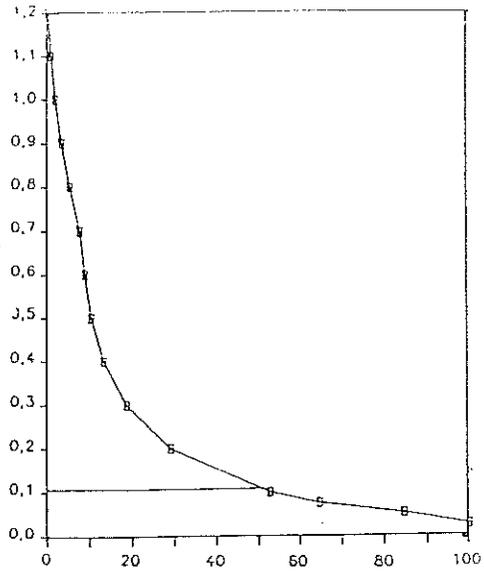
bacino n.8



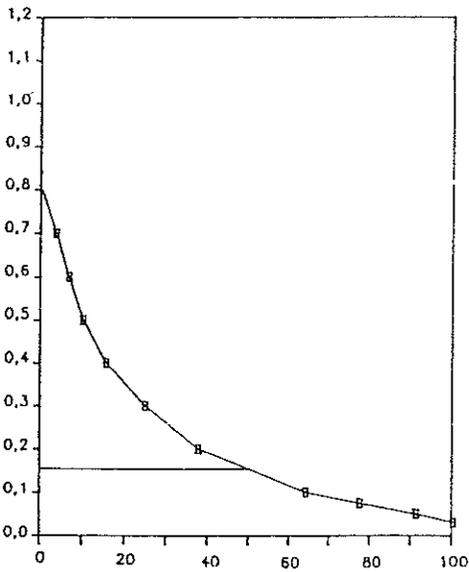
bacino n.9



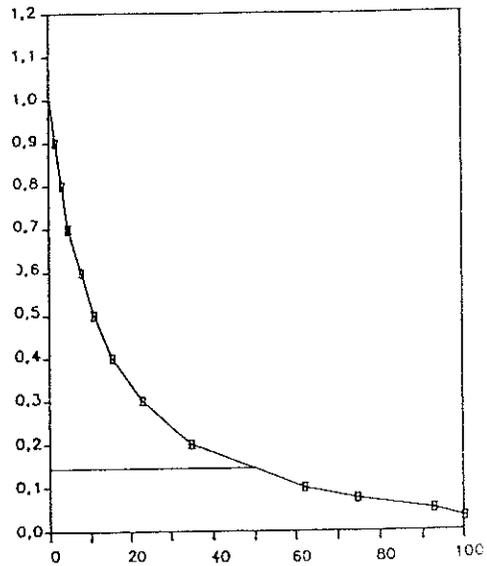
bacino n.10



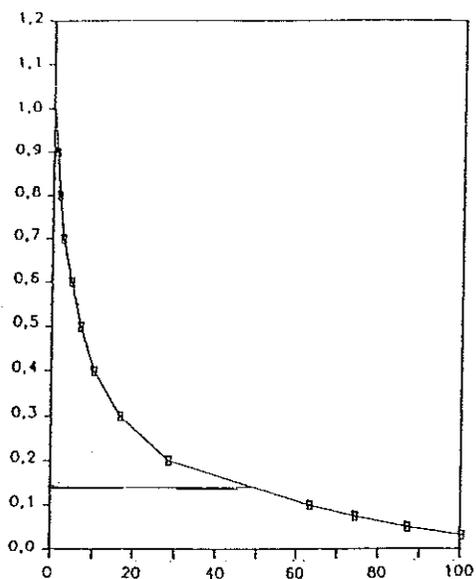
bacino n.12



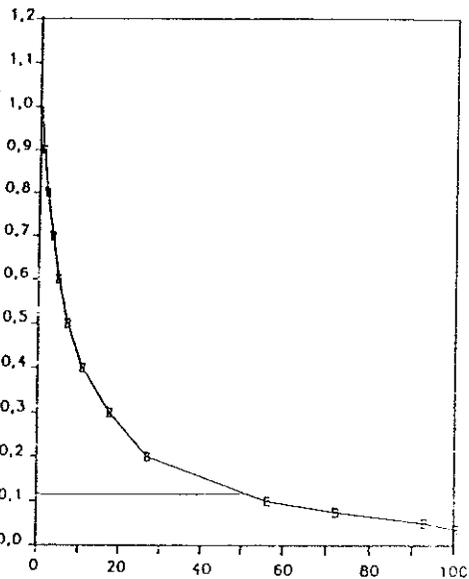
bacino n.13



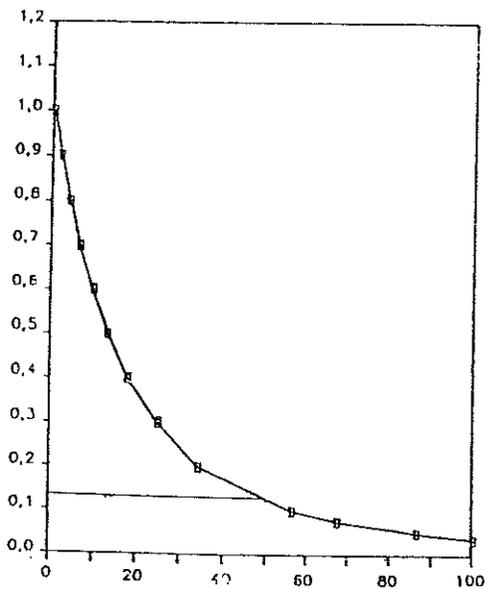
bacino n.17



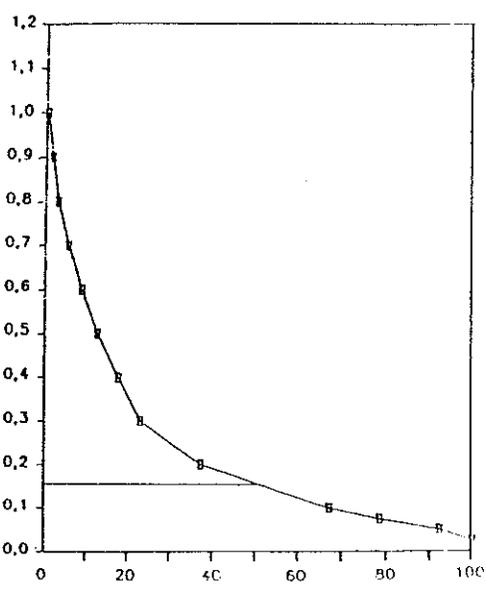
bacino n.19



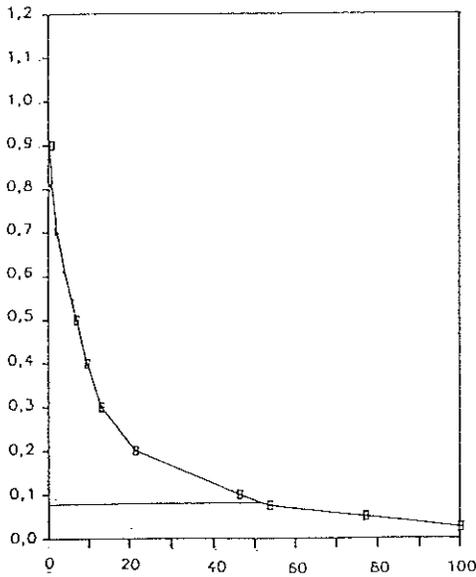
bacino n.20



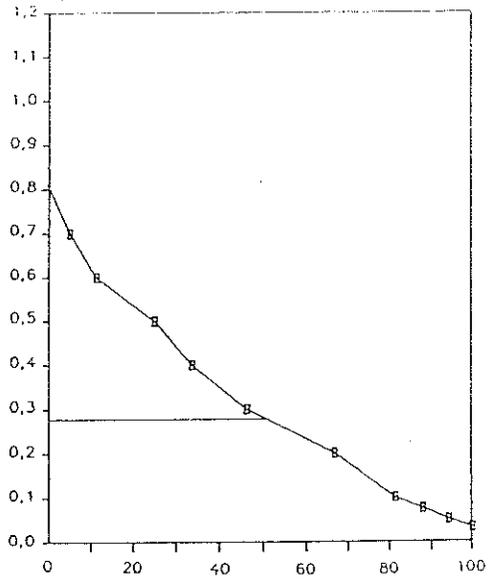
bacino n.22



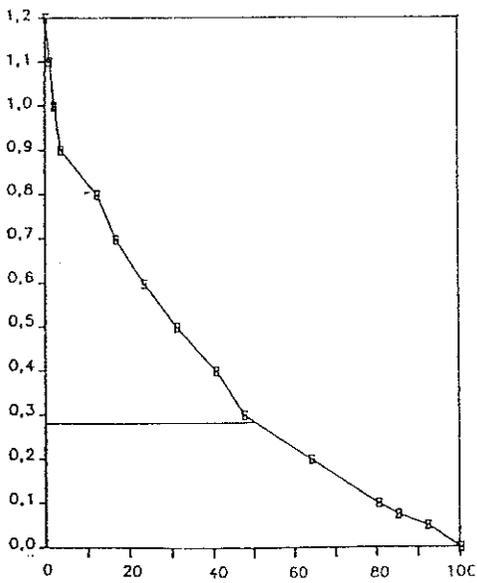
bacino n.23



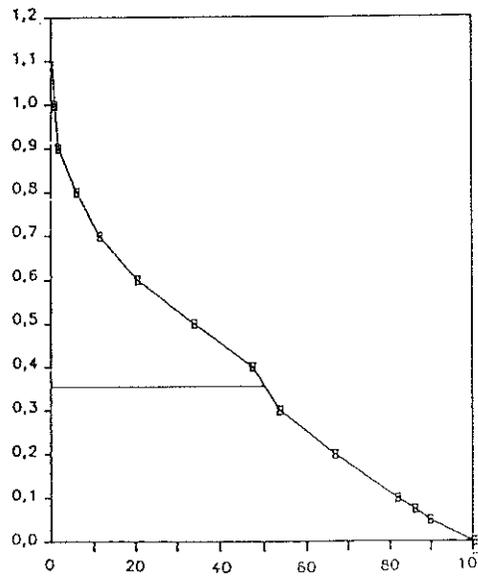
bacino n.25



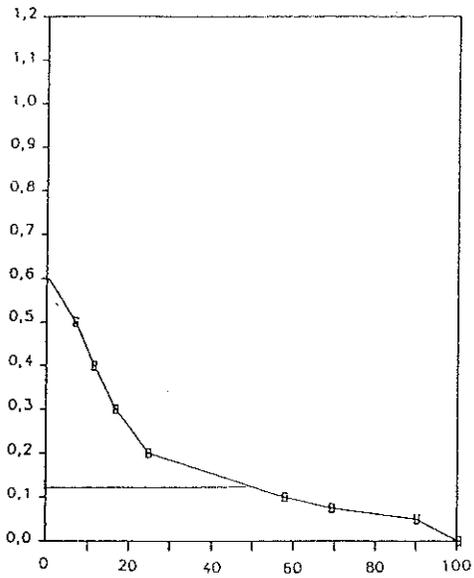
bacino n.30



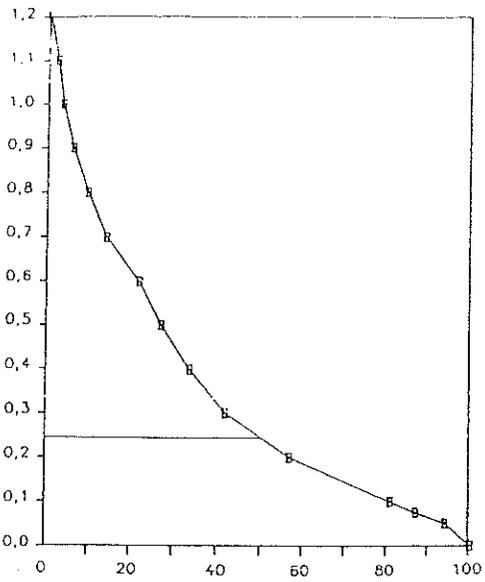
bacino n.32



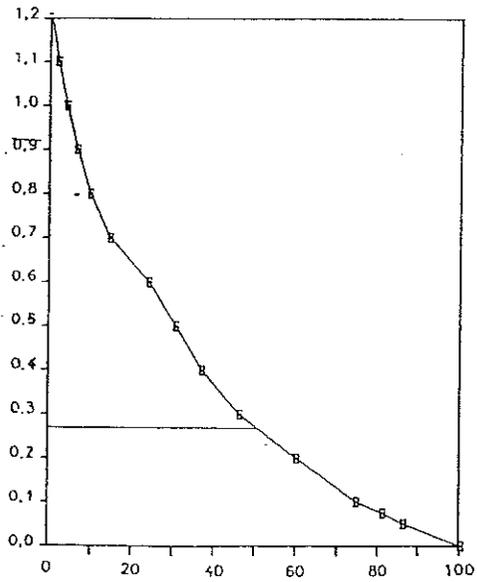
bacino n.33



bacino n.34



bacino n.35



5. CENNI SULLO STATO DELLA VEGETAZIONE NELL'AREA DEL SOMMA-VESUVIO

Per lo scopo di questa nota, particolare importanza riveste la distribuzione della vegetazione, in quanto materializza uno dei parametri fondamentali per la valutazione della pericolosità idrogeologica.

Infatti, il disboscamento aggrava l'erosione, poichè, quando cade su superfici boscate, la pioggia viene trattenuta dalle foglie e dissipa, così, parte della propria energia, mentre le radici delle piante aumentano la coesione del terreno e la vegetazione minuta ostacola la formazione di rigagnoli. Il prato ha funzione analoga.

Conseguenza di ciò è il rallentamento del deflusso superficiale, fino a che bosco e prato non abbiano esaurito la loro capacità di trattenere l'acqua piovana. Ovviamente, se la pioggia è così intensa e lunga da esaurire la capacità di ritenuta del bosco, è chiaro che l'influenza di questo sul deflusso sarà sostanzialmente nulla.

Vanno considerate sotto questo profilo le superfici delle colate laviche del 1944 ed, in parte, del 1906 (per un totale di circa 1,5 chilometri quadrati di superficie) sulle quali insistono popolamenti colonizzatori, costituiti prevalentemente da licheni della specie *Stereocaulon vesuvianum* Pers. In queste stesse aree, sui terreni sciolti, invece, si osservano, anche se l'estensione delle superfici è molto ridotta, popolamenti erbacei che rappresentano la fase iniziale di stadi di vegetazione più evoluta.

Un altro aspetto di vegetazione primitiva si riscontra in corrispondenza delle coltri di materiali piroclastici incoerenti (RICCIARDI, 1981; MAZZOLENI et alii, 1989); per esempio, sulle pendici del Gran Cono vesuviano si affermano fanerogame arbustive di piccola taglia che, con il loro apparato radicale specializzato, riescono a tener dietro agli epidermici, pur se frequenti, movimenti che caratterizzano i depositi sciolti quando costituiscono quei versanti a notevole acclività. Anche queste ricoprono superfici poco estese (circa 3,5 chilometri quadrati di territorio) con valori di copertura della vegetazione solo di rado superiori al 10%. In queste aree, caratterizzate da notevoli acclività, le specie erbacee non sono presenti perchè prediligono superfici poco acclivi. Tali popolamenti vegetali primitivi sono continuamente ricacciati indietro dall'espansione delle essenze utilizzate per il rimboschimento, come la Ginestra e la Robinia (RICCIARDI, 1981).

Caratteristici delle colate laviche meno recenti sono i cespuglieti a leguminose arbustive prevalenti, vale a dire la macchia mediterranea.

Un altro aspetto della vegetazione del Somma-Vesuvio nel quale si ravvisano ancora i lineamenti di popolamenti vegetali naturali, è rappresentato dal bosco che caratterizza le pendici settentrionali del Monte Somma, a partire dai 400 metri di quota. Questa zona, infatti, è la più antica, sotto il profilo geologico, di tutto il complesso vulcanico e su di essa la vegetazione ha avuto più tempo per svilupparsi e per dare modo e tempo ai suoli di evolvere (ABATINO et alii, 1981). Il bosco qui è ricco di elementi termofili e lo strato arboreo è costituito da: Roverella, Acero napoletano, Carpino, Carpinella, Frassino, oltre al Castagneto, al Pino domestico, al Leccio, al Pino marittimo, al Pino nero ed all'Ontano napoletano, specie, tutte queste, introdotte dall'uomo (ABATINO et alii, 1981). Sul lato occidentale di Punta del Nasone (la cima più alta del Monte Somma) si trovano rarissimi esemplari di Betulla (*Betula pendula*), fitorelitti dell'ultima glaciazione, che occupano la nicchia ecologica del Faggio, qui assente perchè specie mesofila. Si tratta, comunque, di boscaglie estremamente degradate e malridotte a causa dell'intenso sfruttamento al quale

sono state, e sono, sottoposte.

Sul territorio vesuviano, tuttavia, hanno maggiore incidenza ed estensione consorzi vegetazionali boschivi come le pinete ed i rimboschimenti a conifere, diffusi soprattutto sui versanti meridionali e sudorientali, a quote mediamente comprese tra i 150 e gli 800 metri. Queste essenze vennero introdotte massicciamente sul Vesuvio intorno al 1840, sebbene, in modo sporadico, fossero già presenti prima (RICCIARDI, 1981). L'intenso sfruttamento al quale esse sono sottoposte reca non pochi danni al già precario equilibrio ambientale dei luoghi.

Un tipo di ricoprimento vegetale più manifestamente prodotto dalla mano dell'uomo è rappresentato dal rimboschimento a Robinia e Ginestra dell'Etna, che hanno mostrato una straordinaria adattabilità all'ambiente vesuviano, tanto da essere estese -particolarmente le seconde-su vasti territori.

Di ridottissima estensione sono i boschi, con formazioni di alto fusto di Leccio, annessi alle ex residenze borboniche (Palazzo reale di Portici e Villa della Favorita), oramai del tutto isolati dall'ambiente naturale e rinchiusi all'interno del tessuto urbano: si tratta, comunque, di consorzi vegetazionali impiantati *ex-novo* che sottolineano la notevole sensibilità che i proprietari terrieri del tempo avevano in relazione alla gestione del territorio e dell'ambiente.

In modo discontinuo, a partire dai 150-400 metri di quota in giù, entro la zona basale del complesso vulcanico ed a seconda della esposizione, e con digitazioni irregolarmente articolate, si estende la fascia che si presenta fortemente urbanizzata e nella quale sono rari gli spazi "a verde"; essa, comunque, è caratterizzata da colture agricole intensive di tipo frutticolo, orticolo, viticolo, floristico, ecc.

Gran parte di questi coltivi è stata abbandonata in tempi piuttosto recenti, lasciando sempre più posto al cemento "selvaggio".

In generale, si può ritenere che l'effetto della vegetazione arborea sia rilevante soltanto per bacini poco estesi, come lo sono quelli del Somma-Vesuvio, nei quali le massime portate si verificano per piogge relativamente brevi ed intense: in questo caso, il bosco potrebbe trattenere una notevole percentuale di acqua piovana, allungando i tempi di corrivazione e riducendo le portate di piena.

6. CENNI SULL' USO DEL SUOLO NELL' AREA DEL SOMMA-VESUVIO

Al fine di definire il Valore esposto (parametro essenziale che concorre alla valutazione del rischio) in termini economici e sociali, è indispensabile effettuare una analisi dell' uso del suolo. Per questo ci si è riferiti alla "Carta dell' utilizzazione del suolo d'Italia" alla scala 1:200.000, che comprende l'intera area del Somma-Vesuvio ed alcuni settori della pianura adiacente.

Tale elaborato cartografa fedelmente, oltre che i centri abitati, la distribuzione delle aree adibite a colture di vario tipo: aree sterili, a pascolo, a bosco, incolti produttivi, etc.

Negli ultimi dieci anni gli effetti dell'antropizzazione dell'area sono risultati più massicci e, oltre alla riduzione delle aree boscate e di quelle adibite a colture in favore di nuovi insediamenti abitativi, anche gli stessi tradizionali coltivi sono stati trasformati in aree a coltivazione intensiva specializzata, con il conseguente incremento di valore ancora non del tutto quantizzabile.

La distribuzione delle superfici antropizzate risultante dalla Carta è in accordo con le caratteristiche geomorfologiche e vegetazionali dell'area. Infatti le aree boschive, in massima parte, occupano le alte pendici del versante settentrionale del M. Somma ed il piedimonte del Vesuvio; le aree sterili, quelle adibite a pascolo e gli incolti produttivi coincidono con il cratere vesuviano e con le superfici delle colate laviche più recenti. Gli insediamenti abitativi e le aree adibite a colture intensive sono diffusi quasi totalmente in tutto il basso piedimonte dell'apparato vulcanico, caratterizzato da deboli pendenze e da abbondanza d'acqua. I seminativi, invece, tipizzano bene le pianure alluvionali adiacenti l'edificio vulcanico.

Di seguito, sono riportati alcuni dei valori agricoli medi per ettaro e per tipo di coltura, riferiti al 1991, determinati dall'Ufficio Tecnico Erariale e pubblicati nel Bollettino Ufficiale della Regione Campania. Essi sono relativi alla seconda delle sette regioni agrarie della Provincia di Napoli, nella quale ricade, quasi totalmente, il territorio oggetto di studio.

Tali valori materializzano uno degli aspetti del Valore esposto: quel parametro, cioè, assolutamente indispensabile per tradurre la Pericolosità in termini reali di Rischio, e costituiscono, di conseguenza, uno degli elementi di base delle quantificazioni che saranno formulate in 9 e 10.

Sembra, ora, sufficiente accennare come, espressi in lire, la coltura a frutteto valga 68.000.000 per ettaro, come il vigneto venga valutato 43.000.000, l'orto 81.000.000, quello irriguo 127.000.000, quello irriguo a coltura floreale 165.000.000, il roseto 169.000.000, il seminativo irriguo 94.000.000, quello a coltura specializzata poliennale 105.000.000; i valori più bassi sono quelli del pascolo con 6.000.000, dell'incolto produttivo con 5.600.000 e dell'incolto sterile con 3.800.000.

7. LA PERICOLOSITA' IDROGEOLOGICA POTENZIALE DEL SOMMA-VESUVIO

Si è più volte sottolineato, in precedenza, come la definizione del "Rischio idrogeologico" sia subordinata alla valutazione della "Pericolosità idrogeologica" che caratterizza quelle aree. Non sembra superfluo specificare come per Pericolosità idrogeologica s'intenda tutto l'insieme di fenomeni legati allo scorrimento superficiale delle acque che, in una situazione di stabilità geomorfologica già precaria (forme del paesaggio non in equilibrio), come quella esaminata, non può che innescare un diffuso dissesto. Definiamo, pertanto, Pericolosità idrogeologica (P_i) la possibilità reale o potenziale che un evento alluvionale particolarmente distruttivo possa manifestarsi in un determinato periodo dell'anno (previsione a breve termine) e colpire una certa zona nell'ambito di un dato bacino imbrifero. Il pericolo, nel nostro caso, è rappresentato dall'evento alluvionale dettato dalle condizioni delle acque di ruscellamento superficiale (*run-off*); stanti le peculiari caratteristiche morfoidrologiche dell'area esaminata, il ruscellamento assume, a momenti, il carattere di vera e propria inondazione (*flooding*) con conseguenze spesso disastrose per uomini e cose distribuiti intorno all'edificio vulcanico. A condizionare il dilavamento concorre un numero elevato di fattori, che possono avere funzione di elemento catalizzante o deterrente:

1) meteorologici: durata, intensità (o altezza di pioggia) e tipo delle precipitazioni;

- 2) idraulici ed idrologici: caratteristiche idrauliche, idrologiche e geometriche dei corsi d'acqua; portata (Q) e portata specifica (Qs), coefficiente di afflusso e tempo di corrivazione delle acque;
- 3) morfologici e morfometrici: superficie di drenaggio, densità, frequenza e coefficiente di drenaggio, forma, altitudine media ed acclività del bacino;
- 4) geologici: natura e caratteristiche di permeabilità dei terreni;
- 5) pedologici: presenza di suoli, stato, natura e caratteristiche di permeabilità degli stessi;
- 6) fitologici: presenza, tipo e distribuzione della vegetazione;
- 7) antropici: stato di manutenzione e/o efficienza della rete idrografica, entità e stato delle opere di bonifica e di sistemazione, stato di urbanizzazione del bacino.

Per la valutazione del dilavamento superficiale e, quindi, della Pericolosità idrogeologica, ciascuno di questi fattori è stato considerato approfonditamente adottando una indicizzazione, pur se soggettiva, al fine di esprimere, per ognuno dei bacini, una pericolosità alta, media o bassa.

Da tale quantificazione è emersa la possibilità di raggruppare insieme l'espressione di valori più o meno omogenei rappresentativi di varie classi di pericolosità. Al vizio di soggettività si è ovviato introducendo correttivi (come, tra l'altro, l'analisi dei dati storiografici) che hanno, di volta in volta, consentito di meglio approssimare le singole valutazioni. Anche il termine "potenziale", volutamente utilizzato, ha significato di ulteriore elemento di mitigazione di una valutazione soggettiva.

Al fine di ottenere una "Carta della Pericolosità idrogeologica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio", alla valutazione dei singoli fattori del dilavamento è seguita una mera sovrapposizione di carte tematiche, ciascuna rappresentativa di un singolo fattore esaminato. Ciò ha consentito di ottenere un elaborato grafico che raggruppa i dati per valori omogenei che esprimono la classe di pericolosità di un singolo bacino idrografico.

Va sottolineato che da una attenta stima dei parametri che maggiormente hanno inciso nel determinare le condizioni di pericolosità, i più significativi si sono palesati :

- a) lo stato di antropizzazione, manutenzione ed efficienza della rete drenante (elemento, questo, nettamente carente, se non assente);
- b) le portate specifiche (mc/sec/kmq), che sono risultate generalmente alte in tutti i bacini del territorio esaminato;
- c) le coperture vegetali: l'intero territorio è soggetto ad uno spaventoso depauperamento della copertura vegetazionale a favore dell'urbanizzazione;
- d) la permeabilità dei terreni: l'estrema urbanizzazione delle aree bacinali del Somma-Vesuvio ha reso impermeabili vaste estensioni di questo territorio (e ciò che "resta" è caratterizzato, generalmente, da terreni poco permeabili).

La correttezza della metodologia impone che il grado (o classe) di pericolosità individuata per un determinato bacino idrografico sia esteso a tutta la superficie del bacino considerato anche se, a rigore, esso dovrebbe essere caratterizzante di aree parziali del bacino e, più in generale, dovrebbe rappresentare solo le porzioni pedemontane dell'edificio vulcanico, laddove sono estesi i centri abitati e la violenza ed il volume delle acque di ruscellamento sono nettamente maggiori. Realisticamente, la Pericolosità da alluvionamento dovrebbe interessare tutta la porzione di territorio del Somma-Vesuvio al di sotto dell'isoipsa dei 300 metri.

Da un tale quadro di Pericolosità idrogeologica sono escluse le aree di interbacino, interessate da altri processi morfogenetici. Tali aree sono da ritenersi le più sicure e non è

un caso che su di esse siano sorti-nel tempo-i primi nuclei dei centri abitati attuali (come S. Anastasia e Somma Vesuviana): chiara scelta topografica del luogo in cui risiedere, effettuata dai vecchi abitanti con acume ed oculatezza.

La "Carta della Pericolosità idrogeologica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio" evidenzia la distribuzione delle aree entro le quali questo tipo di evento disastroso (alluvionamento) può manifestarsi, e con quale entità. La netta differenza di grado di pericolosità tra le aree bacinali poste sui versanti del vecchio edificio del Somma e quelle, altamente pericolose, site sul più giovane versante del Vesuvio, è evidente. Una tale differenza, oltre che ai fattori morfologici, idraulici ed idrologici descritti e che condizionano il dilavamento, è dovuta soprattutto al grado differente di manomissione antropica del territorio.

7.1. Cenni storici su alcuni eventi alluvionali

La sola analisi storica di alcune delle calamità relative a periodi sia lontani che recenti con notevoli danni al patrimonio e con vittime anche in numero considerevole, sarebbe assai indicativa dell'importanza della Pericolosità idrogeologica dell'area in esame. Un primo tentativo di analisi dei documenti storici relativi ad episodi di alluvionamento che hanno interessato i centri abitati dell'area circumvesuviana è stato effettuato da ACCARDO et alii (1981), nell'ambito di un breve studio finalizzato ad individuarne le cause. Il problema era già avvertito dalle popolazioni residenti sulle falde del vulcano, tanto che numerose narrazioni di luttuosi episodi sono addirittura riportate nell'opera del Canonico Carlo CELANO: "... *Ai 9 di Ottobre dell'anno 1569, giorno di sabato, accadde un orrendo diluvio che durò senza cessar mai dal giorno sino alle sette ore della notte seguente; e tanta fu l'abbondanza delle acque che fè danni notabilissimi in tutti i borghi; e quella che calò con empito grande per la strada di S. Sebastiano...rovinò tutte le case dove battè e che stavano nella detta piazza, con la morte di 24 persone ...*".

Il lavoro di ACCARDO et alii (1981) ricorda anche come in Torre del Greco i vicoli Trentola e Mare (in Ercolano, sic!) siano stati assai spesso trasformati dalle acque piovane in torrenti gonfi e vorticosi; il corso principale, d'altra parte, è, ancora oggi, spesso pericolosamente allagato e invaso da detriti nel tratto tra Villa Aprile e l'Ufficio Postale. Gli eventi alluvionali che hanno martoriato questa città, hanno lasciato segni evidenti anche nella configurazione urbanistica e nella toponomastica dei luoghi. I pochi elementi storiografici in nostro possesso, unitamente ai dati forniti da questi autori, testimoniano come già nel 1906 un'alluvione di portata eccezionale avesse devastato buona parte di Torre del Greco. In quella tragica notte perirono 26 persone. Negli ultimi 20 anni, poi (come si rileva anche nella cronaca della stampa locale e nazionale), si sono dovute registrare non poche vittime, oltre a danni grandissimi alle colture, alle strade, alle case, agli acquedotti ed alle linee elettriche. E' ancora vivo il ricordo dei giovani travolti ed uccisi dalla "lava" d'acqua che li sorprese in via Cavallo, che corrisponde all'alveo Cavallo. Nel 1969 due fidanzati furono trascinati in mare nella loro auto travolta dalla furia delle acque incanalate sempre in via Cavallo e, nell'ottobre del 1979, furono altri due automobilisti a subire la stessa "sorte". Analogamente, nel Dicembre del 1982 perirono due sorelline che ebbero la ventura di attraversare quell'alveo-strada mentre infuriava un violentissimo temporale. Oltre questi eventi mortali, le cronache hanno, con triste frequenza, riportato anche casi infiniti di piene capaci di trascinare in mare grandi

quantità di materiali di vario genere.

Non è possibile, allo stato attuale ed in questa sede, fornire una casistica di tutti gli eventi alluvionali che hanno seriamente danneggiato i centri abitati circumvesuviani: e, pure se quanto citato a proposito di Torre del Greco è assolutamente emblematico, numerosi sono gli elementi che fanno ipotizzare situazioni simili di danno anche in altri comuni. A puro titolo di esempio, vale ricordare come nel 1906 un'alluvione abbia devastato i territori dei comuni di Pollena Trocchia, Cercola e S. Anastasia: in quella occasione furono distrutte o seriamente danneggiate svariate opere civili (ponti, ferrovie, etc.). Numerose vittime, invece, si ebbero durante l'alluvione di Ottobre del 1908 che interessò i comuni di Barra, S. Giorgio a Cremano, Portici, Ercolano e S. Giovanni a Teduccio. Altre notizie riguardanti danni e vittime sono riportate in CATENACCI (1992).

A concretizzare una drammatica continuità nel tempo, poi, sono dei primi giorni dell'Agosto (si veda anche 8.1.) e dell'Ottobre 1992 le notizie di piogge di modeste proporzioni e di durata comunque breve (quella dell'Ottobre si è caratterizzata per 69,6 mm distribuiti tra le 6,49 del 3 e le 14,48 del 4) che, investendo l'area di Torre del Greco, hanno causato una violenta inondazione a livello, rispettivamente, di uno dei corsi d'acqua che sfociano a mare poche centinaia di metri a sudest del porto di quella città e dell'area di Piazza Palomba. Tra i danni, si è dovuto lamentare il ferimento di ben dodici persone, avvenuto mentre cercavano riparo dal pericolo, nel primo caso; in occasione del secondo evento, una ragazza ha seriamente rischiato di essere travolta e trascinata in mare.

8. LO SVILUPPO DELL'ANTROPIZZAZIONE NELL' AREA DEL SOMMA-VESUVIO E CONSIDERAZIONI DI IMPATTO AMBIENTALE

L'impatto ambientale, seguendo una definizione largamente condivisa, è da rapportarsi *"all'insieme degli effetti diretti, indiretti, secondari, cumulativi, sinergici, a piccola e grande distanza, positivi e negativi, indotti da un insieme o da singoli interventi sull'ambiente"* a livello di tutte le componenti, quali l'uomo, la fauna, la vegetazione, il suolo, l'acqua, l'aria, il paesaggio, il patrimonio culturale e storico, i beni materiali, lo *status* socio-economico, considerate sia singolarmente che nelle possibili interrelazioni.

Da un tale postulato può cogliersi, e con immediatezza, come lo sviluppo della antropizzazione si palesi come una delle "opere" che impattano maggiormente con non poche delle componenti ambientali.

Ove, poi, un tale fenomeno assuma, come è accaduto per l'area vesuviana, un carattere così irregolarmente ed abnormemente diffusivo, trattarne inserendolo nel quadro territoriale implicato, significa anche, nei fatti, operare una valutazione di impatto ambientale.

E tentare un'analisi a posteriori, e nella situazione di fatto di oggi, se, da un lato, può assumere il sapore, certamente amaro, di scarsa utilità, è però, d'altro canto, ulteriore chiave di lettura di quanto di abnorme è stato compiuto a livello di un territorio comunque "delicato".

Affinchè un tale tentativo sia efficace, è però necessario che esso sia assolutamente oggettivo e che si muova, pertanto, entro ambiti rapportabili ad un denominatore comune

ed a quei pochi, ma precisi, punti di controllo assai chiaramente esplicitati in RUSSO & VALLETTA (1993).

8.1. Carta dello sviluppo dell'antropizzazione dell'area del Somma-Vesuvio ed analisi di impatto ambientale

I punti di controllo dell'analisi che segue sono, da un lato, la componente suolo e sottosuolo (che sarà il solo "bersaglio" ad essere preso in esame) e, dall'altro, l'urbanizzazione, quale soggetto impattante, raffrontate segnatamente nell'ottica della compatibilità delle "modificazioni qualitative e quantitative indotte" e tenendo conto delle "misure previste per ridurre o eliminare eventuali effetti negativi".

Preliminarmente, è opportuno considerare separatamente i due elementi.

L'urbanizzazione, in una situazione come quella attuale dell'area vesuviana, non può che essere definita dallo stato di fatto dell'antropizzazione, che trae spiccata caratterizzazione dalla commistione dei normali *trends* evolutivi di una razionale previsione di sviluppo (sia urbano che delle attività produttive) con lo spirito più scriteriato di abuso del suolo, che ha visto cementificare quasi tutto e quasi dappertutto, se non, addirittura, dalla sovrapposizione del secondo ai primi.

E' parsa, quindi, necessaria la redazione di una "Carta dello sviluppo dell'antropizzazione", finalizzata alla valutazione delle "modificazioni qualitative e quantitative indotte" la quale evidenzia la tipicità dell'area e la assoluta mancanza di "misure previste per ridurre o eliminare eventuali effetti negativi".

Senza volere far carico, a posteriori, al pianificatore territoriale, che possa essersi occupato dell'area vesuviana, anche di una ricerca, che avrebbe evidenziato di quanti preziosi spunti fosse ricca già la "Carte Topographique des laves du Vesuve" di LE HON, edita nel 1865 e relativa agli eventi verificatisi tra il 1631 ed il 1861, già un attento esame analitico delle edizioni IGM del 1872-1875, del 1900-1906, degli aggiornamenti del 1913, del 1920 e del 1929 e di quelle successive all'evento eruttivo del 1944 e relative alla metà degli anni '50 ed '80, rispettivamente, sarebbe stato-come è-fonte cospicua di elementi di giudizio e di basi sulle quali costruire una "Carta dello sviluppo dell'antropizzazione".

Tale elaborato mappa in maniera certamente semiquantitativa (non avendo scelto, deliberatamente, un dettaglio estremo che non avrebbe avuto che scarso significato nell'evidenziare l'andamento delle "modificazioni" nello spazio e nel tempo), ma largamente rispondente alla finalità, i "limiti" degli abitati agli anni '30 ed alla metà degli anni '50 ed '80.

La cruda eloquenza di quelle linee di perimetro e, particolarmente, del loro dilatarsi non sembra aver bisogno di alcun commento, che sarebbe certamente superfluo: può solo osservarsi come tra, circa, il 1870 ed il 1930 gli abitati non abbiano subito che espansioni contenute, a parte qualche "tendenza", quale, ad esempio, quella di Torre del Greco tra la SS 18 ed il mare, all'altezza di S. Maria la Bruna, ed il modesto svilupparsi di Torre Annunziata a monte dello stesso asse viario.

Tra il 1930 e la metà degli anni '50, la crescita comincia ad avvertirsi, pure se entro limiti che sembrano, in prima istanza, accettabili.

Le "modificazioni qualitative e quantitative indotte", da rapportare alla componente ambientale suolo e sottosuolo, e che vengono di seguito considerate analiticamente per ognuno dei centri circumvesuviani, si riferiscono al raffronto maggiormente significativo

in termini di impatto, che è quello tra la copertura IGM del 1954-1956 e l'aggiornamento della stessa al 1984 (fatto eseguire dal Servizio Urbanistica della Regione Campania). L'approccio al rapporto con la componente suolo e sottosuolo deve considerare ed analizzare sia l'assetto geomorfologico, sia quello geologico in senso ampio con la lettura dei fenomeni vulcanici presenti, sia i rischi geologici "*connessi ad eventi variamente prevedibili (sismici, vulcanici, franosi, meteorologici, marini, ecc.) e caratterizzati da differente entità in relazione all'attività umana nel sito prescelto*".

L'assetto geomorfologico e vulcanologico trovano più ampia trattazione in altre parti di questa nota per quel che attiene il rapporto tra l'antropizzazione, l'uso del territorio e i valori di Pericolosità, Vulnerabilità e Rischio.

In termini di impatto, è sicuramente più efficace analizzare, in chiave di lettura attualistica, la distribuzione e l'estensione areale delle vulcaniti e porle in rapporto con la diffusione dell'antropizzazione.

Ed una tale analisi può essere condotta anche per gradi di approssimazione, il più elementare dei quali, quantomeno per la porzione meridionale del territorio implicato, è identificabile in una lettura attenta della cartografia dell'IGM alla scala 1:25000. Le tavole 184 II NE (Vesuvio), 185 III NO (Boscoreale), 185 IV SO (S. Giuseppe Vesuviano), 184 I SE (Pomigliano d'Arco) sono, infatti, già assai ricche di elementi ben precisi di valutazione, quali la delimitazione di numerosi corpi lavici (per ognuno dei quali è datato anche l'evento effusivo relativo), l'indicazione di cupole e bocche e toponimi non equivoci.

L'analisi, rapida, inizia a partire dai territori di S. Sebastiano al Vesuvio e Massa di Somma estesi, al 1956, lungo tre fasce orientate NO-SE, subparallele, variamente allungate e/o articolate e collegate da una trasversale. Al 1984 si è a fronte di un corpo pressoché unico, con apofisi, anche di qualche rilevanza, verso monte e verso i vicini territori di Pollena, Cercola, Napoli e Portici.

La notazione, verso monte, unica ma precisa "1855-1872-1944", i limiti fisici dei corpi lavici, la dizione "Lave" tra quota 170 ed "i Catini" sono stati ignorati dal programmatore territoriale (ce n'è stato uno?) ed il cartografo che ha operato l'aggiornamento 1984 non è riuscito a reperire, in carta, lo spazio fisico per indicare di nuovo la dizione "Lave".

L'ambito comunale di Portici, esteso lungo la fascia costiera tra S. Giovanni a Teduccio e, circa, il Granatello, si sviluppa ampiamente verso monte, raggiungendo quota 100 verso nordovest e circa quota 200 verso sudest, salvo un cuneo che si insinua sin'oltre quota 400 entro le pendici occidentali del Vesuvio.

Lo sviluppo al 1954 interessava, oltre che la fascia a cavallo della SS 18 (e questo sarà un motivo ricorrente, non solo per tale asse viario) due direttrici fondamentali, una a settentrione e l'altra a meridione, verso-e, per una, anche oltre-il tracciato dell'A3. Al 1984 si è in presenza di un *continuum* sino circa a quota 160 e non mancano presenze urbane sino oltre la quota 200. Le indicazioni, scarse ma ammonitrici, "Lave del 1872-1944" e "Lava del 1872" sono state ignorate.

Il territorio comunale di Ercolano è esteso lungo la fascia costiera tra, circa, il Granatello e gli Scogli della Scala e, verso monte, sino a comprendere anche un ampio settore del cratere. Al 1954, gli insediamenti interessavano una striscia non particolarmente ampia a cavallo della SS 18; verso nordovest, un nucleo di una qualche importanza era esteso sino all'A3 ed un altro tra, circa, Villa Palumbo e Villa Marsiglia.

L'espansione al 1984, a carattere estensivo ed intensivo nella fascia a valle dell'A3, ha aggredito il versante sino quasi a quota 400, senza che le "Lave del 1631" (tra Villa Petriccione e Croce dei Monti), le "Lave del 1858", le "Lave del 1891-93", le "Lave del 1895-99" suggerissero nulla o insinuassero qualche ragionevole dubbio.

Torre del Greco occupa una fascia ben più ampia dell'area costiera, estesa come è tra gli Scogli della Scala e quelli di Protà: gli altri due lati di quel triangolo grossolanamente equilatero al quale può essere assimilata la forma del territorio comunale, hanno vertice in comune in corrispondenza del cratere.

Le considerazioni che possono svolgersi sono analoghe a quelle relative ad Ercolano: il nucleo esistente al 1954 era esteso (oltre che lungo tutto lo sviluppo urbano della SS 18) particolarmente tra il porto ed il casello della A3, al di là del significativo polo verso S. Maria la Bruna e di modesti insediamenti intorno a Cappella Bianchini, Cappella Nuova, Lamaria. Al 1984, la cementificazione, con un fronte pressocchè compatto, pur se assai più folto verso ovest-nordovest, ha raggiunto circa quota 300, senza voler trascurare la fascia tra la SS 18 ed il mare: indicazioni quali "Lave del 1867", Bocche del 1794", "Lave del 1794", "Lave del 1822", "Lave del 1872", Lave del 1944", "Bocche del 1861", "Lave del 1861", "Lave del 1804-1805-1806" e toponimi quali "Lava Nuova" (che è, poi, quella del 1861) in corrispondenza del quale è andato estendendosi il vecchio nucleo di Cappella Bianchini e "Masseria sotto la Lava" (che è quella del 1760), saranno stati considerati curiosi accidenti, se non errori di stampa.

I territori di Trecase, Boscotrecase e Boscoreale occupano anche essi, nell'insieme, un'area a morfologia circa triangolare isoscele del territorio vesuviano: il lato minore è subparallelo verso ovest alla fascia costiera e, verso est, al corso del F. Sarno: gli altri due hanno vertice comune nel cratere. Lo sviluppo al 1954-55 sembrava privilegiare l'asse stradale di collegamento dei tre centri e di essi con Torre Annunziata, da una parte, e con gli abitati dell'area perivesuviana orientale, dall'altra, con apofisi significative verso mare e verso monte; Boscoreale, in particolare, raggiungeva la linea ferroviaria Torre Annunziata-Terzigno-Cancello.

L'espansione al 1984 ha interessato sia le aree verso mare (particolarmente verso il tracciato dell'A3 ed a cavallo della strada ferrata appena citata) che quelle verso monte, sino, circa, alla isoipsa 300. Anche in questo caso, indicazioni - e limiti - drammaticamente chiari, quali "Lava del 1906", "Lava del 1754", "Lava del 1714", "Bocca di Fossamonaca", "Bocca di Viulo" è probabile siano state interpretate come relative ad altri territori.

Terzigno si sviluppa lungo parte del versante orientale del Vesuvio, compreso come è tra le quote 725 ed 832, verso monte, e la piana. Il nucleo esistente al 1955 seguiva lungo due fasce parallele, collegate da una trasversale, lo sviluppo degli assi di collegamento stradale e ferroviario. Il quadro al 1984 non è caratterizzato da quella intensività ed estensività comuni ad altri centri e le urbanizzazioni, a nuclei radi e sparsi, si sono spinte sino verso quota 200: non si può ugualmente non sottolineare la ricchezza di indicazioni - e di limiti areali - quali "Bocche del 1906", "Lava del 1906", "Cupole del 1937", "Lava del 1929", "Lava del 1881-83", "Lava Caposecchi (1834)", "Lave del Mauro(1764)", "Lave del 1850".

Il successivo grado di approssimazione si avvale di parte della letteratura scientifica recente a livello sia, e specificatamente, dei contenuti in chiave probabilistico -previsionale della pericolosità, sia della cartografia geologica.

Il riferimento, in particolare, è a note di BARBERI et alii (1979), SANTACROCE (1987; 1989), SCANDONE (1979a; 1979b; 1983), SCANDONE et alii (1983) ed alla "Carta Geologica del complesso vulcanico Somma-Vesuvio" alla scala 1:25000, edita nell'ambito del sottoprogetto 3 del P.F. Geodinamica del CNR.

Si è appena accennato ad un quadro probabilistico-previsionale della pericolosità: l'analisi - e non è stato necessario scendere al dettaglio - delle note e della cartografia, mentre conferma e, ovviamente, specifica e particolareggia la prima approssimazione per quanto riguarda i corpi lavici, apre un'altra prospettiva di pericolosità di grande rilevanza: quella connessa alle colate di fango.

Pur nel limite legato all'essere costruita su basi statistiche e sulla configurazione morfologica attuale (come, peraltro, evidenziato dai ricercatori che l'hanno elaborata) la zonazione della possibilità di invasione da *lahar* offre spunti degni della massima attenzione.

Maggiormente esposte alla possibilità che si verifichino e si ripetano tali eventi sono l'area di Portici-Resina, sul bordo occidentale-sudoccidentale, ed il versante settentrionale: ed è a livello di quest'ultimo che BARBERI et alii (1979) hanno ipotizzato la presenza di aree, variamente articolate ed accostate, caratterizzate da pericolosità crescente secondo quattro classi.

La pericolosità più bassa distingue, procedendo da Massa di Somma verso oriente, alcuni settori (generalmente di estensione da modesta a media), uno dei quali è esteso tra l'abitato appena citato ed i Cognoli di Giacca; un secondo, assai modesto, è sito a sud-sudest di S.Anastasia; un terzo è a sud-sudovest di Seggiari, tra Somma Vesuviana ed Ottaviano; altri due circondano, quasi ad arco, le propaggini occidentali-sudoccidentali di quest'ultimo abitato; gli ultimi, assai limitati, sono ubicati circa ad ovest di Terzigno.

La successiva classe sembra caratterizzare la sola porzione orientale del versante in esame e, più in particolare, due aree, grossolanamente nastriformi, che da sud-sudovest del Rione Trieste di Somma Vesuviana e dai partimenti occidentali di Ottaviano giungono sino ai Cognoli di Ottaviano, ed un ampio settore, a geometria subrettangolare, esteso dai Cognoli di Levante sin verso S. Giuseppe Vesuviano - S.Maria la Scala.

Pericolosità ancora più alta è quella che distingue alcune zone che interessano la quasi totalità dell'area in esame: in particolare tre fasce, circa triangolari, dai Cognoli di S.Anastasia e da quelli di Ottaviano interessano il piedimonte verso Somma Vesuviana-Rione Trieste; altre due, circa rettangolari, da quota 800 si estendono sin verso S.Giuseppe Vesuviano e Boccia al Mauro, rispettivamente.

La pericolosità maggiore è propria del settore occidentale, ove si eccettui una striscia che dai Cognoli di Ottaviano si approssima alle estreme propaggini occidentali dell'abitato. L'area assai più importante è quella compresa tra i Cognoli di Trocchia, quelli di Pollena e la Punta del Nasone e la congiungente, circa, le periferie estreme di Massa di Somma e Somma Vesuviana.

La fascia pedemontana, che comprende la gran maggioranza degli abitati compresi tra Massa di Somma e, circa, Terzigno, rappresenta l'area di potenziale accumulo.

Gli abitati ritenuti a più alto rischio da *lahar* sono quelli (già interessati in epoca storica) di Ottaviano, Somma Vesuviana, Pollena e Trocchia; quelli a minor rischio S.Giuseppe Vesuviano e S.Anastasia, essendo quest'ultimo centro protetto da un alto morfologico costituito, peraltro, da depositi di antichi *lahars*.

Il quadro della distribuzione dei corpi lavici (e, quindi, in una visione attualistica,

della pericolosità relativa, pure se in senso lato) trova, come già accennato, una connotazione più precisa a livello sia di individuazione e cartografia della loro estensione (oltre che di bocche eruttive, sepolte e non, e di centri avventizi) che di una zonazione inedita - dovuta a Pinna e Scandone e ripresa da SCANDONE & CORTINI (1983) - della metà meridionale del vulcano (a sud di una grossolana congiungente Cercola con S. Giuseppe Vesuviano) in funzione della probabilità e di invasione ad opera di colate e di apertura di bocche eruttive.

La cartografia geologica evidenzia assai chiaramente come la presenza e la distribuzione di bocche eruttive, sepolte e non (al di là di quelle, numerose, all'interno del recinto calderico del M. Somma) e di centri avventizi di emissione, interessi, in pratica e pure se con una geometria "sparsa", tutto lo sviluppo del vulcano. Le seconde, sono presenti al Cagnoletto - a nord di Torre Annunziata - a quote intorno ai 600 ed ai 460 metri; le prime, interessano aree ad est di Ottaviano (in località Strocchioni), a nord ed a sudest di Torre del Greco (Montagnelle, a quota 410 ed in mare, a lato di Torre Bassano), lungo il Lago di Pollena ed il Vallone delle Vigne, a sud-sudest di Pollena Trocchia.

I centri avventizi sono quelli dei Camaldoli della Torre (non più recente del 79 d.C. e non più antico di 17000 anni), le bocche del 1760 e quelle di Fossamonaca e Viulo a nord-nordovest e ad ovest, rispettivamente, di Trecase, le bocche del 1861 e quelle del 1794, sviluppate lungo allineamenti di fratture circa ovest-est, presenti ad est di Portici.

La cartografia geologica è assai eloquente, poi, a livello della estensione e della articolazione dei corpi lavici.

Senza entrare in dettagli che non siano quelli strettamente funzionali alla filosofia di queste "considerazioni" (e pure con il rischio di qualche ripetizione di quanto già evidenziato al primo livello di approssimazione), è assai evidente come:

- larga parte dello sviluppo urbano di Massa di Somma e S. Sebastiano al Vesuvio abbia interessato i corpi lavici del 1855 e del 1944;
- le lave del 1855, del 1872 e, pure se in misura assai ridotta, quelle del 1694, del 1767 e del 1944 siano state interessate dall'espansione verso monte di Portici;
- lo sviluppo di Ercolano abbia variamente interessato i corpi lavici legati agli eventi effusivi del 1694, del 1767-71, del 1858 e del 1871-72;
- l'espansione di Torre del Greco abbia letteralmente invaso aree occupate dai prodotti lavici riferibili alle eruzioni del 1697, del 1698, del 1717, del 1737, del 1760, del 1794, del 1804-05-06, del 1847, del 1861, del 1872 ed "avvicinato" quelle del 1944;
- Trecase, Boscotrecase e Boscoreale (e Torre Annunziata per un'area assai modesta e per l'eruzione del 1906) abbiano, con la loro espansione, interessato variamente le lave riferite agli eventi del 1714, del 1754, del 1822, del 1850 e del 1906;
- lo sviluppo di Terzigno abbia intagliato il piede della colata del 1929.

Elementi di grande interesse sono, poi, anche quelli desumibili dalla accennata zonazione della pericolosità legata sia all'apertura di bocche eruttive che a colate laviche.

La prima fenomenologia viene ritenuta maggiormente probabile nell'area corrispondente al recinto calderico del M. Somma e lungo due apofisi, una delle quali è orientata NO-SE e comprende le bocche del 1794 e del 1861; entro l'altra, ad andamento circa N-S, sono comprese le bocche del 1760, Viulo e Fossamonaca. Anche l'area di Camaldoli della Torre viene ritenuta come potenzialmente interessabile dall'apertura di bocche.

La pericolosità da colate laviche è stata zonata secondo quattro classi di probabilità. Alla più alta corrispondono l'area entro il recinto calderico del Somma ed una fascia sino

circa a quota 500, che coincidono con parte dell'andamento delle lave del 1944, nonché altri settori limitati alle quote comprese tra 450 m e 500 m nei partimenti centrali ed occidentali e che giungono a quote intorno ai 250 in quelli orientali.

Entro la classe a probabilità immediatamente più bassa ricadono "strisce" variamente articolate che, nelle aree occidentali, comprendono abitati quali Massa di Somma e S. Sebastiano al Vesuvio, in quelle centrali giungono ad avvicinare Torre del Greco, e, in quelle orientali, interessano territori a quote decrescenti sino ai 250 m in prossimità di Terzigno.

	Superf. kmq	densità ab/kmq	abitaz.	prima 1919	1919- 1945	dopo 1945	% increm. dopo 1945	abitanti
S. Giorgio a Cremano	4,11	15.117	15.453	1.410	573	13.470	87	61.129
Portici	4,52	17.790	20.513	3.005	1.050	16.458	80	80.410
Torre del Greco	30,66	3.379	25.653	4.639	2.474	18.540	72	103.605
Torre Annunziata	7,33	8.258	14.577	2.969	2.105	9.503	65	60.533
Boscotrecase	7,18	1.710	3.250	1.012	568	1.670	51	12.276
Trecase	6,45	1.414	2.362	425	298	1.639	69	9.120
Boscoreale	11,20	2.200	6.424	1.131	877	4.416	68	24.636
Pompei	12,41	1.848	5.806	542	756	4.508	77	22.934
Ercolano	19,64	2.969	13.316	2.863	1.271	9.182	69	58.310
Terzigno	23,51	464	2.917	434	543	1.940	66	10.915
S. Giuseppe Vesuviano	14,08	1.679	5.985	825	853	4.307	72	23.660
Ottaviano	19,85	1.015	4.970	1.090	714	3.166	63	20.147
Somma Vesuviana	30,74	762	6.094	1.144	845	4.105	67	23.433
Sant'Anastasia	18,76	1.121	5.298	681	466	4.151	78	22.915
Pollena Trocchia	8,11	1.068	2.121	358	213	1.549	73	8.661
S. Sebastiano al Ves.	2,60	3.382	2.174	110	102	1.962	90	8.794
Cercola	7,24	2.579	4.594	594	300	3.700	80	18.671
TOTALE	228,40	2.500	141.57	23.233	14.008	104.266	73,68	571.149

Tab. 5 - Elementi demografico-territoriali dell'area perivesuviana.

La classe successiva è quella che interessa il numero maggiore di centri abitati: le aree ad essa corrispondenti lambiscono Ercolano, inglobano Torre del Greco e Trecase, sfiorano i limiti occidentali di Torre Annunziata e Boscotrecase.

Entro la classe ritenuta a probabilità più bassa, infine - e che abbraccia il rimanente territorio - rientrano, tra gli altri abitati, S. Giorgio a Cremano, Portici, Ercolano, Torre Annunziata, Boscotrecase, Boscoreale e Terzigno.

Notazioni particolari quali, tra tante, l'essere stato l'ospedale Maresca di Torre del Greco costruito in prossimità di bocche eruttive, l'essere il centro avventizio dei Camaldoli della Torre stato pesantemente interessato da impianti sportivi e turistico-residenziali, l'avere un muro di sostegno costruito dalle Ferrovie dello Stato sul litorale di Torre del Greco interessato e parzialmente occultato siti di interesse archeologico (e non è certamente un "caso fortuito" che, in corrispondenza di quel manufatto, nel pomeriggio del 5 Agosto 1992 un evento piovoso modesto - circa 14 mm - e di breve durata - intorno ai venti minuti - abbia determinato danni, variamente gravi, all'integrità fisica di

dodici bagnanti), aggiungono assai poco - o, addirittura, nulla - ad un quadro di assoluta non compatibilità ambientale dell'abnorme espansione dell'antropizzazione (nel quale bene si inseriscono gli elementi demografico-territoriali di tab. 5) che ha, in maniera pesantemente negativa, caratterizzato gli ultimi decenni.

Era - ed è - davvero necessario che si creassero condizioni tali da far fuggire i pellicani rosa che, a memoria degli anziani, svernavano lungo il litorale antistante la via Prota in Torre Annunziata?

9. LA VULNERABILITA' IDROGEOLOGICA POTENZIALE DEL SOMMA-VESUVIO

La Vulnerabilità (U) del territorio e delle cose che su di esso insistono, in rapporto ad un determinato evento distruttivo e conseguentemente, ad un preciso tipo di pericolosità, è fattore di fondamentale importanza nella definizione del Rischio geologico.

Per ciò che riguarda la Vulnerabilità vulcanica, sono in fase di allestimento apposite cartografie da parte degli enti preposti (CNR-GNV, 1990; Osservatorio Vesuviano; Ministero per la Protezione Civile, etc.); per gli altri tipi di Vulnerabilità e Pericolosità si è ancora lontani dalla redazione di analoghe mappe.

Al fine di valutare il più correttamente possibile l'entità del Rischio geologico nell'area vesuviana, è stata redatta una Carta della Vulnerabilità in rapporto alla Pericolosità idrogeologica: un tale tentativo è stato possibile grazie anche all'esistenza di dati, quali:

- 1) densità della popolazione;
- 2) densità di antropizzazione del territorio (superficie antropizzata per Km²);
- 3) valore e tipo di uso del suolo.

Il manifestarsi di un evento idrogeologico distruttivo è avvenimento che deve essere ritenuto occasionale poiché esso non si verifica con cadenza costante nel tempo, ma solo qualora siano realizzate le condizioni meteorologiche che danno luogo a quel tipo di nubifragio che, stanti le peculiari caratteristiche geomorfologiche del territorio esaminato, lascia spesso segni evidenti tanto nel tessuto geografico ed urbano che nelle popolazioni. Queste condizioni, nell'area del Somma-Vesuvio, si verificano con frequenza se non stagionale quantomeno annuale (si vedano i capitoli precedenti) e solo l'avvedutezza dell'uomo in tali circostanze riesce a limitare la drammatica perdita di vite umane e danni al patrimonio esposto.

La Vulnerabilità, nella definizione UNESCO (1972), è la percentuale di Valore che si stima di perdere nel corso di un determinato evento. Tale evento, in un'ottica geomorfologica, potrebbe ben essere di natura idrogeologica (inondazione, alluvionamento, etc.). Una tale definizione sembra di non facile applicazione, ed ancor più nel caso del complesso del Somma-Vesuvio, a livello del quale non è costante l'entità del pericolo (non sempre si verificano quelle condizioni che lo determinano) ed una stima di ciò che possa essere perduto non rispecchierebbe mai criteri oggettivi di valutazione. I cenni storici sugli eventi alluvionali (7.1) sembrano essere sufficienti ad evidenziare come l'entità del pericolo sia tale da determinare, a luoghi, solo disagi e piccoli danneggiamenti nella funzionalità e fruibilità del territorio, ed a luoghi, pur in presenza di eventi della stessa intensità, da provocare un grado di distruzione locale anche assai elevato, con perdita, addirittura, di vite umane. Ciò è, chiaramente, funzione del livello locale di dissesto idro-

geologico, del grado di antropizzazione e dell'entità della manomissione o della cattiva gestione del territorio.

Per la redazione di una carta della Vulnerabilità in funzione della Pericolosità idrogeologica, pertanto, è necessario, innanzitutto, individuare sia il (o i) valore(i) socio-economico(i) che caratterizzano il territorio che la differenziazione del grado di dissesto idrogeologico, di antropizzazione, di uso del territorio ed, infine, di entità del pericolo.

Le aree più vulnerabili dal punto di vista idrogeologico sono, naturalmente, quelle immediatamente prospicienti i canali (trasformati, in larga parte, in alvei-strada o, addirittura, in strade asfaltate), sono da rapportare alla fascia di esondazione e si snodano parallelamente al corso d'acqua. Le zone di alta e media valle dei torrenti vedono le acque correre naturalmente incanalate, i normali processi morfogenetici modellare il paesaggio, i volumi idrici coinvolti essere bassi, un dissesto idrogeologico a livelli modesti, se non trascurabili, ed una "densità" di uso e di antropizzazione del territorio assolutamente congrua. Le basse valli dei torrenti, caratterizzate come sono dal raccogliere i volumi idrici maggiori e dal presentare un elevato grado di dissesto idrogeologico nonché un uso abnorme del territorio ed una antropizzazione spesso scriteriata, materializzano concrete situazioni di vulnerabilità. E' da ritenersi, pertanto, che sia possibile, se non opportuno e necessario, definire la Vulnerabilità idrogeologica come **"la percentuale del valore esposto nell'area di esondazione che si stima (stima soggettiva) possa essere direttamente o indirettamente perduta, resa non funzionante o danneggiata durante un evento alluvionale"**. Da una tale definizione sembra emergere chiaramente quali possano essere sia l'effetto diretto delle acque di piena su tutto ciò che viene coinvolto, che quello indiretto. Si pensi, al proposito, a quale panico sia soggetta la popolazione vesuviana nell'occasione, che si verifica almeno una volta all'anno, di violenti nubifragi: il *blackout* dell'energia elettrica e dei servizi telefonici, per esempio, vanifica ogni possibilità di collegamento con gli ospedali e con i servizi sociali e di tempestività degli interventi di protezione civile.

9.1. La Carta della Vulnerabilità idrogeologica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio

La "Carta della Vulnerabilità idrogeologica potenziale dell'area del Somma-Vesuvio" che individua tre zone, caratterizzate da differenti gradi di Vulnerabilità potenziale, è stata redatta con l'ottica appena delineata. Il termine "potenziale" vuole avere valore e funzione di elemento mitigatore di una valutazione semiquantitativa e degli ovvi limiti imposti dalla cartografia utilizzata. Di seguito, vengono caratterizzate le tre zone, più o meno concentriche, a differente grado di vulnerabilità.

9.1.1. Zona a vulnerabilità bassissima

Questa zona, che comprende l'area centrale del complesso vulcanico, è solcata da tutte le alte valli dei bacini idrografici che incidono le pendici superiori del fianco esterno del vulcano. Il limite è alquanto articolato. Mentre sul versante settentrionale esso segue, grosso modo, l'isoipsa dei 350 m (in corrispondenza della quale i valloni o cupe si trasformano in laghi), sul versante orientale scende sino a quote intorno ai 250 m o, solo in qualche area, inferiori. Sul versante meridionale, invece, quel limite si mantiene intorno ai 300 m di quota e, verso sudovest, sale fino ai 450 m, per interessare, poi, il versante oc-

cidentale fino ai 500 m e ridiscendere a nord-ovest intorno ai 300-350 m. Questa zona è caratterizzata, essenzialmente, da boschi naturali e rimboschimenti artificiali. La quasi totalità delle aree craterica e calderica interna è sterile o con tracce di vegetazione pioniera; rarissimi sono i coltivi ed i pascoli. Da questo punto di vista, il Valore dell'uso del suolo può essere stimato mediamente intorno ai 25,2 milioni di lire per ettaro.

La densità abitativa è quasi nulla, poichè l'esistenza di vincoli paesaggistici e naturalistici sembra sia riuscita a scoraggiare il sorgere di complessi residenziali; ciononostante, e particolarmente durante gli ultimi dieci anni, non sono mancati speculazione edilizia ed abusivismo, che hanno localmente peggiorato la precaria situazione di dissesto idrogeologico. La densità abitativa non supera, comunque, valori di alcune decine di abitanti per Km². Anche la superficie antropizzata non supera poche migliaia di metri quadrati per Km². Non vi sono infrastrutture, se si eccettua l'unica strada pubblica di accesso al Vesuvio ed al vecchio Osservatorio Vesuviano e qualche albergo e/o ristorante.

L'entità della Pericolosità da alluvionamento, stanti le caratteristiche geomorfologiche, è assai bassa, se non nulla. La Vulnerabilità può essere stimata come bassissima o nulla, considerando anche che la percentuale del Valore esposto nelle aree interessate dal ruscellamento è inferiore all'1% o, addirittura, nulla.

9.1.2. Zona a vulnerabilità media

Il limite superiore di quest'area coincide con l'inferiore della precedente; quello inferiore, che è molto articolato, individua e racchiude una grossa fascia subanulare che circonda le basse pendici del complesso vulcanico. In essa sono racchiuse le medie valli dei torrenti che solcano il fianco esterno del vulcano.

Sul versante settentrionale, il limite inferiore coincide, all'incirca, con l'alta valle dei lagni intorno, cioè, all'isoipsa dei 200 m; a nord-est ed a nord-ovest esso risale fino ai 250 m, ad ovest fino ai 300 m, per poi ridiscendere di nuovo verso i 150 m di quota; ad est, invece, detto limite si spinge fino all'isoipsa dei 200 m per giungere, poi, a sud-est, fino ai 50 m di quota. Lungo il versante meridionale, il limite inferiore si mantiene pressochè parallelo all'isoipsa dei 150 m, in corrispondenza dell'abitato di Torre del Greco risale bruscamente fino ai 250 m, per raggiungere, poi, la costa all'altezza della località Leopardi della stessa città.

Questa zona è caratterizzata prevalentemente da coltivi a vigneti e frutteti, oltre che da sporadiche coltivazioni floristiche. Le essenze boschive sono limitate a piccolissime aree; relativamente scarse sono quelle adibite a colture orticole ed a seminativi. Il Valore complessivo medio dell'uso del suolo in questa zona si aggira intorno ai 124 milioni di lire per ettaro.

A dispetto dell'esistenza di vincoli paesaggistici, archeologici e naturalistici, entro questa zona speculazioni ed abusivismo edilizio sono stati notevoli ed incontrollati. La densità abitativa è di qualche migliaio circa di abitanti per chilometro quadrato, quella di antropizzazione è circa il 10% della superficie totale, ed è pari, cioè, in media, a circa 100.000 metri quadrati di superficie antropizzata per chilometro quadrato, cifra-è bene tenerne conto-valutata per difetto. Il Valore medio dell'uso del suolo per edilizia economica e popolare si aggira tra 1 e 2 milioni di lire per metro quadrato.

L'entità della Pericolosità di questa zona è valutabile come media, in quanto l'assetto geomorfologico è tale da non consentire ancora l'accumulo di volumi idrici critici; la Pericolosità maggiore risiede nella trasformazione di gran parte degli alvei in strade -

lungo le quali, peraltro, si snodano nuclei abitativi e si svolgono le principali attività antropiche - che versano, talora, in pessime condizioni di manutenzione, esaltando, così, notevolmente il deflusso superficiale.

La valutazione della Vulnerabilità per questa zona si attesta su valori medi (dall'1 al 5 %), in quanto l'entità del valore esposto lungo le aree di esondazione, seppure mediamente alto, trova attenuazione nella Pericolosità relativamente bassa.

9.1.3. Zona a vulnerabilità alta ed altissima

Anche questa zona ha andamento subanulare, con limite superiore che coincide, salvo qualche interruzione a sud e sudest, con quello inferiore della precedente. Essa racchiude tutta la fascia pedemontana del complesso vulcanico e, parzialmente, la piana; il limite inferiore, lungo il versante orientale, segue, circa, l'isoipsa dei 50 m, su quello occidentale racchiude anche il tratto di piana in destra del Lago Ponticelli ed è aperto verso mare, mentre sul versante settentrionale esso coincide, all'incirca, con l'isoipsa dei 100 m e, lungo tutto quello meridionale e sudoccidentale, con la linea di costa.

Questa è la zona più intensamente sfruttata dall'uomo, tanto per gli insediamenti abitativi che per le colture agricole. Da questo punto di vista, il suolo, laddove non è stato reso edificabile (la superficie relativa è valutabile intorno al 35% di quella totale), è utilizzato per coltivi e seminativi vari; rarissime sono le aree boscate, interamente assorbite nel tessuto urbano. Predominano le colture intensive e specializzate, nonché quelle floristiche. Il Valore dell'uso del suolo non edificabile si aggira intorno agli 80 milioni di lire per ettaro di terreno.

La densità di popolazione è tra le più alte d'Italia con valori di diverse migliaia di abitanti per chilometro quadrato; nel caso dei soli centri abitati di S. Giorgio a Cremano e Portici questa supera, anche largamente, i 10.000 abitanti per Km². La densità di antropizzazione è elevatissima e pari mediamente a circa il 75% della superficie ed in alcuni casi (come in gran parte del settore occidentale e sudoccidentale della zona e per alcuni centri abitati come Torre del Greco, S. Giuseppe Vesuviano, Torre Annunziata, Ottaviano e Terzigno) essa giunge a sfiorare quasi il 100%. La stima media della densità di antropizzazione è di circa 700.000 metri quadrati di superficie per Km². In questa zona sono concentrate tutte le infrastrutture e si realizza il 90% delle attività lavorative dell'area vesuviana. L'entità della pericolosità è elevata, in quanto è in questa zona, nella quale sono localizzate le basse valli dei torrenti, che si accumulano i volumi idrici maggiori, che prendono a crescere i corpi alluvionali (coni di deiezione sul piedimonte del Somma) e che si hanno gli sbocchi a mare. E' in questa area, dove tutti i corsi d'acqua sono trasformati in strade asfaltate, che il deflusso superficiale è massimo e non v'è sistema fognario adeguato a smaltire le acque di piena efficacemente, che si realizza il massimo livello di dissesto idrogeologico. Pur essendo il valore della Vulnerabilità alto (tra il 5 ed il 10%), è tuttavia possibile precisare più dettagliatamente i limiti entro i quali questo valore è altissimo e vede coinvolte anche le stesse vite umane. A tal fine, è stata operata una distinzione tra settori ad alta Vulnerabilità, dove sono solo beni mobili ed immobili ad essere esposti al pericolo, e ad altissima Vulnerabilità, in corrispondenza delle quali anche le vite umane entrano nella stima delle perdite. Ovviamente, per entrambi i settori è impossibile valutare gli effetti indiretti (perdita di capacità produttiva e funzionalità del territorio e dei servizi) prodotti dagli eventi alluvionali, ma certamente essi sono notevoli. Per ciò che riguarda gli effetti diretti, la stima del valore percentuale

che può essere perduto è relativa solo al valore dei beni mobili ed immobili ed alla capacità di uso del suolo, ed è quantificabile mediamente intorno al 5-10% del totale del valore esposto lungo le aree esondabili prospicienti i torrenti. Naturalmente, una tale valutazione perde di significato per quei settori nei quali un bene, comunque incommensurabile, quale la vita umana stessa è direttamente esposta e, spesso, coinvolta. Sono rimaste escluse, per ovvi motivi, le aree di interbacino, che risulteranno a Vulnerabilità zero. Allo stesso modo, anche le aree bacinali presenti nel settore meridionale e sudoccidentale del complesso vulcanico, di estensione così limitata da non costituire una reale situazione di pericolo, sono state considerate a Vulnerabilità più bassa e cartografate entro la zona di media vulnerabilità, stante la similitudine di molte caratteristiche.

10. IL RISCHIO GEOLOGICO S.I. NELL'AREA DEL SOMMA-VESUVIO

Il Rischio geologico s.l. (componente fondamentale del Rischio ambientale), nell'area del Somma-Vesuvio è definito dalla relazione (RUSSO & VALLETTA, 1993)

$$\mathbf{Rg\ s.l. = \Sigma V_n \times \Sigma P_n / O}$$

E' stato evidenziato come, nella sua valutazione, la Pericolosità vulcanica (P_v) e quella idrogeologica (P_i) giochino un ruolo fondamentale, essendo del tutto trascurabili o insignificanti altri tipi di pericolosità. La Pericolosità idrogeologica nell'evoluzione del rilievo vulcanico gioca un ruolo fondamentale durante i periodi di quiescenza dell'attività eruttiva. Noi riteniamo che la Pericolosità idrogeologica (P_i) sia elemento della Pericolosità geomorfologica (P_{gm}) come definita da RUSSO & VALLETTA (1993) e, in quanto tale (alla luce anche di riscontri nella realtà), è limitata localmente, ha tempi di ricorrenza brevi, è rapida e viene innescata, sicuramente, anche dalla mano dell'uomo. Come è ovvio, devono essere escluse da questa definizione tutte le altre fenomenologie geomorfologiche (frane, erosione, etc.) la morfogenesi delle quali non è direttamente connessa allo scorrimento delle acque superficiali, ma, piuttosto, alla generale situazione di instabilità geomorfologica del rilievo, il quale potrebbe anche non presentare una situazione di dissesto idrogeologico. Da questa specificazione, necessaria, discende che il Rischio geologico s.l. al Somma-Vesuvio sarà espresso dalla relazione:

$$\mathbf{Rg\ s.l. = U_i \times (P_i + P_v) / O}$$

dove P_i è la Pericolosità idrogeologica, P_v quella vulcanica, U_i la Vulnerabilità idrogeologica e O rappresenta il fattore Organizzazione sociale.

La Vulnerabilità vulcanica non è stata presa in considerazione:

- a) perchè sono ancora in corso di preparazione mappe della Vulnerabilità vulcanica dell'area ad opera di studiosi ed enti più specificamente competenti;
- b) perchè la mappa della Pericolosità vulcanica, redatta sulla base non del probabile prossimo evento eruttivo vesuviano ma, piuttosto, su quella della storia eruttiva degli ultimi duemila anni, palesa come tutta l'area, pure se per fenomenologie diverse, si sia mostrata particolarmente vulnerabile;
- c) perchè il comune "buon senso" e la conoscenza del territorio e di tutto il valore espo-

sto al pericolo vulcanico portano a ravvisare una Vulnerabilità totale in caso di eruzione vulcanica;

d) perchè l'imprevedibilità della tipologia eruttiva della prossima eruzione vanifica la possibilità di adeguare uno scenario di vulnerabilità del territorio; ove, poi, ciò fosse fattibile, sarebbe opportuno parlare di più scenari di vulnerabilità, a seconda dei settori interessati e delle fenomenologie che caratterizzano un evento eruttivo (apertura di bocche laterali, scorrimento di colate laviche, caduta di piroclastiti, terremoti, prosciugamento e/o inquinamento delle falde, scorrimento di *lahars*, etc.).

Tutti questi motivi hanno suggerito di escludere, da quella relazione, la Vulnerabilità vulcanica del territorio, consentendo, così, di semplificare notevolmente la valutazione del Rischio geologico s.l., che risulta essere funzione della Pericolosità vulcanica, di quella idrogeologica e della Vulnerabilità idrogeologica. A ciò va aggiunto il rapporto tra Rischio ed Organizzazione sociale che, lo si è già visto, costituisce fattore di notevole "peso" nella relazione.

10.1. La Carta della Macrozonazione potenziale del Rischio geologico s.l. dell'area del Somma-Vesuvio

Al fine di delineare la distribuzione territoriale del Rischio geologico s.l. nell'area somma-vesuviana, è stata redatta una mappa alla scala 1:50.000 finalizzata, segnatamente, a graficizzare un cospicuo insieme di valutazioni semiquantitative. I limiti connessi alla scala cartografica ed al tipo di valutazioni effettuate (che conservano un margine - che ci si è sforzati fosse il più limitato possibile - di soggettività) consigliano di definire l'elaborato ottenuto come una "macrozonazione" del Rischio geologico s.l., entro la quale vengono individuate nella maniera la più precisa possibile, pur se schematicamente, aree con caratteristiche peculiari in rapporto al Rischio. L'aggettivazione <<potenziale>> sigilla il carattere semiquantitativo delle situazioni di rischio che la mappa vuole rappresentare. In tal senso, quindi, la "Carta della macrozonazione potenziale del Rischio geologico s.l. dell'area del Somma-Vesuvio" sintetizza in un'unica rappresentazione i dati ed i fattori del Rischio trattati separatamente in precedenza. La cartografia utilizzata (I.G.M. all'1:25.000, aggiornata al 1984) reca già, in se, gran parte del Valore del territorio esposto al Rischio; i limiti tra le macrozone mappate sono da intendersi non tanto come netti e ben definiti, quanto come fasce di transizione tra macrozone con caratteristiche difficilmente omogenee. Quei limiti racchiudono, invece, macrozone con caratteristiche di Vulnerabilità e Pericolosità abbastanza omogenee e difficilmente scindibili; suddivisioni nell'ambito della stessa macrozona rappresentano aree con caratteristiche tali, in rapporto al tipo di Vulnerabilità e/o Pericolosità, da renderne opportuna la differenziazione. La cartografia reca la suddivisione dell'area del Somma-Vesuvio in tre macrozone sulla base del differente grado (alto, medio e basso) di Rischio geologico s.l. che le caratterizza. La suddivisione delle prime due macrozone in due submacrozone è stata suggerita da disomogeneità relative al differente tipo di Pericolosità o Vulnerabilità al quale sono esposte.

10.1.1. Macrozona ad alto Rischio geologico s.l.

Questa macrozona trae caratterizzazione ed importanza dal racchiudere aree tipizzate da Vulnerabilità e Pericolosità alte. La suddivisione in due submacrozone, comun-

que ad alto rischio, è stata suggerita dal tipo di Pericolosità.

La prima submacrozona (A) comprende tutta l'area vulcanica centrale, pericraterica e pericalderica, racchiusa, grosso modo, dalla curva di livello dei 500 m; sul versante sud-occidentale, il limite dell'area scende sino alle isoipse dei 200 e 250 m. Questa submacrozona comprende, tra l'altro, tutta l'area entro la quale si sono aperte bocche eruttive negli ultimi due secoli e che è, comunque, assai probabile continui a modificarsi con le prossime eruzioni. In questa submacrozona il Valore del territorio esposto al Rischio è relativamente basso, come la Vulnerabilità e la Pericolosità idrogeologica. La Pericolosità vulcanica è, ovviamente, massima.

La seconda submacrozona (B) racchiude, cinturandola, quasi tutta la fascia pedemontana, ed è interrotta solo tra gli abitati di Torre del Greco e Torre Annunziata. I limiti coincidono, grosso modo, con il tratto pedemontano (quello superiore) e con la pianura (quello inferiore) tanto nei quadranti settentrionali che in quelli occidentali e sudoccidentali. Sulla costa, il limite inferiore è aperto verso il mare. Ad est, invece, esso ricalca un pò anche l'area di pianura fino al Lago di Ponticelli. In questa submacrozona, che racchiude l'area più colpita dagli eventi alluvionali e tutti i maggiori centri abitati dell'area somma-vesuviana, sono presenti alcuni apparati vulcanici avventizi di età medioevale e preistorica.

In questa submacrozona, caratterizzata dal Valore massimo del territorio esposto al Rischio, dalla massima Vulnerabilità e Pericolosità idrogeologica e da Pericolosità vulcanica minima, si realizza anche il massimo livello di dissesto idrogeologico conseguente alla incontrollata e scriteriata antropizzazione.

10.1.2. Macrozona a medio Rischio geologico s.l.

Questa macrozona è caratterizzata da un valore del Rischio intermedio. In essa, che solo a sud si spinge sino alla fascia costiera compresa tra Torre del Greco e Torre Annunziata, sono racchiuse le aree delle medie ed alte pendici esterne del complesso vulcanico, vale a dire la cintura altopedemontana. Anche questa macrozona è stata suddivisa in due submacrozone (C e D) a rischio intermedio, ma caratterizzate da un differente grado e tipo di Pericolosità e Vulnerabilità.

La prima (C) è tipica, a settentrione e ad oriente, delle alte e medie pendici del Somma; altri lembi sono presenti ad ovest ed a sud-sudovest. A sud, essa interessa il tratto litoraneo tra Torre Annunziata e Torre del Greco. Peculiarità di questa submacrozona sono il Valore medio del territorio esposto al rischio, la Vulnerabilità idrogeologica medio-alta ed una Pericolosità, sia vulcanica che idrogeologica, media.

La seconda submacrozona (D) si identifica in larga parte del versante pedemontano vesuviano sia sudorientale che occidentale. Essa è caratterizzata da Valore del territorio esposto a rischio, da Pericolosità e Vulnerabilità idrogeologica da considerarsi medie e da Pericolosità vulcanica di entità medio-alta.

10.1.3. Macrozona a basso Rischio geologico s.l.

Questa macrozona, che coincide con le aree di pianura presenti nei quadranti settentrionali, ad oriente ed a sud-est del complesso vulcanico, laddove il piedimonte passa alla piana alluvionale, materializza l'area a più basso Rischio geologico s.l.

I parametri che la contraddistinguono dalle altre sono rappresentati da un Valore medio del territorio esposto a rischio, da Vulnerabilità e Pericolosità idrogeologiche me-

dio-basse e da un basso valore di Pericolosità vulcanica.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori sono grati ai professori Ludovico BRANCACCIO e Giuseppe LUONGO per le proficue discussioni e la lettura critica del manoscritto. Un particolare ringraziamento va anche ai professori Paolo GASPARINI e Bruno D'ARGENIO, per la disponibilità mostrata durante la fase di elaborazione del testo. Si ringraziano, inoltre: Enrico CIRESE, per i preziosi consigli sulla cartografia; Mario ARDOLINO e Tonio LALLI, per la elaborazione delle tabelle ipsometriche, delle curve ipsografiche e la raccolta di taluni degli elementi storiografici relativi agli eventi alluvionali citati nel testo; Diego SGAMBATI e Giancarlo VALLETTA, per l'elaborazione al computer del testo, di grafici e di tabelle.

BIBLIOGRAFIA

AA.VV., Atti del Convegno <<I vulcani attivi dell'area napoletana>>, Amm.ne Provinciale di Napoli, 179 pp. (1979).

E. ABATINO, L. CINQUEGRANA, R. DE JOANNA, R. FELITTI, O. IACCARINO, A. MORELLI, F. SASSI & S. SICA, <<Il Vesuvio: un esempio di educazione ambientale attraverso la conoscenza del territorio>>; Atti del Conv. - Mostra "Istituzione del Parco Naturale Vesuvio-Monte Somma", Amm.ne Prov. di Napoli, p. 135 - 170 (1981).

A. ACCARDO, P. BIANUCCI, V. BONASIA & S. GAGLIONE, <<Il bacino imbrifero del Vesuvio: dissesti idrogeologici e difesa del territorio>>; Rapporto interno, Conv. interclubs Rotary club-Lions club, Torre del Greco-comuni vesuviani: 13 pp., Torre del Greco (1981).

F. APRILE, L. BRANCACCIO, G. CARANNANTE, E. CRAVERO, A. CINQUE, S. DI NOCERA, M. GUIDA, G. IACCARINO, F. ORTOLANI, T. PESCATORE, I. SGROSSO & M. TORRE, <<Dati preliminari sulla neotettonica dei Fogli 172 (Caserta), 185 (Salerno), 196 (Sorrento), 197 (Amalfi)>>; Pubbl. n. 155, CNR, Prog. Fin. Geodinamica, p. 85-112 (1978).

M. ARDOLINO, C. GRANATA & T. LALLI <<Il Rischio geologico del Somma-Vesuvio>>; Tesi di laurea in Scienze Geologiche, inedita (1986).

V. ARNO', C. PRINCIPE, M. ROSI, R. SANTACROCE, A. SBRANA & M.F. SHERIDAN, <<Eruptive history>>; in: R. SANTACROCE (Ed.) <<Somma-Vesuvius>>, CNR, Quad. de "La Ricerca Scientifica", 114, Prog. Fin. Geodinamica, Monografie finali, 8, p. 53 - 103 (1987).

P. BALDI, G.M. CAMELI, B. D'ARGENIO, A. OLIVERI DEL CASTILLO, T. PESCATORE, M. ROSSI & B. TORO, <<Geothermal research in Western Campania

(Southern Italy). A revised interpretation of the Parete-Qualiano structure>>; Symp. Geot. Volc. Medit. Area, Athenes (1976).

F. BARBERI & R. SANTACROCE, <<Mappa del rischio vulcanico nell'area vesuviana>>; atti del Conv. - Mostra "Istituzione del Parco Naturale Vesuvio-Monte Somma", p. 41 - 52 (1981).

F. BARBERI & P. GASPARINI, <<Il rischio vulcanico>>; Quad. de "Le Scienze", 4, p. 72 - 83 (1983).

F. BARBERI, G. MARINELLI, M. ROSI & R. SANTACROCE, <<Il rischio da lahar nel Somma-Vesuvio>>; Atti del Conv. "I vulcani attivi dell'area napoletana", Amm.ne Prov. di Napoli, p. 93-95 (1979).

F. BARBERI, M. ROSI, R. SANTACROCE & M.F. SHERIDAN, <<Volcanic hazard zonation: Mt. Vesuvius>>; in: H. TAZIEFF & J.C. SABROUX, <<Forecasting volcanic events>>, Developments in volcanology, 1, p. 149 - 161 (1983).

D. BARRA, G. BONADUCE, L. BRANCACCIO, A. CINQUE, F. ORTOLANI, S. PAGLIUCA & F. RUSSO, <<Evoluzione geologica olocenica della piana costiera del F.Sarno (Campania)>>; Mem. Soc. Geol. It., 42, p. 255 - 267 (1992).

A. BERNASCONI, P. BRUNI, L. GORLA, C. PRINCIPE & A. SBRANA, <<Risultati preliminari dell'esplorazione geotermica profonda nell'area vulcanica del Somma-Vesuvio>>; Rend. Soc. Geol. It., 4, p. 237 - 240 (1982).

V. BONASIA, L. CASERTANO, G. IMBO' & A. OLIVERI DEL CASTILLO, <<Variazioni morfologiche del gran cono vesuviano e conformazione di alcuni crateri flegrei e cileni>>; atti del XX Congr. Geogr. It., p. 3 - 37 (1967).

O. BOTTINI, <<La regione vesuviana. Studio chimico-geoagrológico. La zona alta>>; Ann. Tecn. Agraria, 54 pp (1932).

L. BRANCACCIO, A. CINQUE, P. ROMANO, C. ROSSKOPF, F. RUSSO, N. SANTANGELO & A. SANTO, <<Geomorphology and neotectonic evolution of the Tyrrhenian flank of the southern Apennine (Region of Naples, Italy)>>; Z. Geomorph. N.F, Suppl. Bd. 82, p. 47 - 58 (1991).

C. CAPUTO, R. FUNICIELLO, G. LA MONICA, E. LUPIA PALMIERI & M. PAROTTO, <<Geomorphological features of the Latian volcano (Albano Hills, Italy)>>; Geol. Romana, 13, p. 157 - 201 (1974).

V. CATALANO, <<Contributo alla morfologia del Somma-Vesuvio. Il cratere anteriormente al parossismo del 79 d.C.>>; Rend. Acc. Sc. Mat., Fis. e Nat. in Napoli, ser. 4, 42, p. 1 -27 (1975).

V. CATENACCI, <<Il dissesto geologico e geoambientale in Italia dal dopoguerra al 1990>>; Serv. Geol. Naz., Mem. descrittive della Carta Geologica d'Italia, 47, 301 pp (1992).

C. CELANO canonico, <<Notizie del bello, dell'antico e del curioso della città di Napoli>>; Edizione a cura di Mozzillo A., Profeta A. e Macchia F.P., E.S.I. editore, Napoli, (1974).

S. CICCACCI, D. DE RITA & P. FREDI, <<Studio geomorfologico delle depressioni vulcaniche di Sacrofano e Baccano nei Monti Sabatini (Lazio)>>; Mem. Soc. Geol. It., 35, p. 833 - 845 (1988).

A. CINQUE, H.A. HOSSEIN, L. LAURETI & F. RUSSO, <<Osservazioni preliminari sull'evoluzione geomorfologica della Piana del Sarno (Campania, Appennino Meridionale)>>; Geogr. Fis. Dinam. Quat., 10, p. 161 - 174 (1987).

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE - GRUPPO NAZIONALE PER LA VULCANOLOGIA, <<Scenario eruttivo del Vesuvio. Evento massimo atteso nel caso di ripresa dell'attività eruttiva a medio-breve termine>>; Rapporto redatto per conto del Dipartimento della Protezione Civile - Servizio Previsione e Prevenzione, 53 pp (1990).

G. DELIBRIAS, G.M. DI PAOLA, M. ROSI & R. SANTACROCE, <<La storia eruttiva del complesso vulcanico Somma-Vesuvio ricostruita dalle successioni piroclastiche del Monte Somma>>; Rend. Soc. It. Min. Petrol., 35, p. 411 - 438 (1979).

F. DRAMIS & B. GENTILI, <<La frequenza areale di drenaggio ed il suo impiego nella valutazione quantitativa dell'erosione lineare di superfici con caratteristiche omogenee>>; Mem. Soc. Geol. It., 14, p. 337 - 349 (1976).

F. FANTOLI, <<Linee segnalatrici di possibilità climatica e loro applicazione idraulica>>; Atti del Regio Istituto Lombardo, Milano (1913).

M. FEDI & A. RAPOLLA, <<The campanian volcanic area: analysis of the magnetic and gravimetric anomalies>>; Boll. Soc. Geol. It., 106, p. 793 - 805 (1987).

I. FINETTI & C. MORELLI, <<Esplorazione sismica a riflessione nei Golfi di Pozzuoli e di Napoli>>; Boll. Geof. Teor. Appl., 16, p. 175 - 220 (1974).

W.E. FULLER, <<Flood Flows>>; Proc. Am. Soc. Civ. Eng., p. 1011-1064, New York (1913).

M. GIANDOTTI, <<Idrologia>>; Barbera editore, Firenze (1937).

R. HOOKE LE B., <<Processes on arid region alluvial fans>>; J. Geol., 75, p. 438 - 460 (1967).

F. IPPOLITO, F. ORTOLANI & M. RUSSO, <<Struttura marginale tirrenica dell' Appennino campano: reinterpretazione di dati di antiche ricerche di idrocarburi>>; Mem. Soc. Geol. It., 12, p. 227 - 250 (1973).

G. IPPOLITO, <<Appunti di costruzioni idrauliche>>; 2 vol., Liguori editore, Napoli (1977).

H. LE HON, <<Histoire complete de la grande eruption du Vesuve de 1631, with topographical map of Vesuvius lavas from 1631 till 1861>>; Bull. Acad. Sc. Lett. Beaux Arts, 20, p. 483 - 538 (1865).

L. LIRER & T.S. PESCATORE, <<Studio sedimentologico delle piroclastiti del Somma-Vesuvio>>; atti Acc. Sc. Fis. e Mat. in Napoli, ser. 3, 7, p. 139 - 187 (1968).

G. LUONGO, <<Metodologia per la difesa dagli eventi sismici e vulcanici e l'uso organico del territorio>>; in: Atti del Conv. - Mostra "Istituzione del Parco Naturale Vesuvio-Monte Somma", 5-6 Febbraio 1981, p. 3 - 40, Napoli (1981).

G. LUONGO, <<Rischio vulcanico. Vesuvio, Campi Flegrei, Ischia, Etna, Stromboli, Vulcano>>; in: Atti del Convegno "Rischio vulcanico e programmazione territoriale", La Provincia di Napoli, 8, p. 34 - 61 (1986).

A. MALLADRA, <<La pioggia sul Vesuvio nel periodo 1863-1913>>; Boll. Soc. Sism. It., 18 (1914).

S. MAZZOLENI, M. RICCIARDI & G. G. APRILE, <<Aspetti pionieri della vegetazione del Vesuvio>>; Ann. Bot., 47, suppl. 6, p. 97 - 110 (1989).

C. MENNELLA, <<Il clima del basso Tirreno (Campania)>>; in: <<Il Clima d'Italia>>, 3, p. 401 - 510, Fratelli Conti editori, Firenze (1973).

A. NAZZARO, <<Il Vesuvio: storia naturale dal 1631 al 1944>>; Boll. Soc. Natur. in Napoli, 94, p. 1 - 26 (1985).

P. NICOTERA & P. LUCINI, <<La costituzione geologica del sottosuolo di Napoli nei riguardi dei problemi tecnici>>; atti VII Conv. Ass. It. Geotecnica, p. 45 - 104 (1967).

F. ORTOLANI & F. APRILE, <<Nuovi dati sulla struttura profonda della Piana Campana a SE del fiume Volturno>>; Boll. Soc. Geol. It., 97, p. 591 - 608 (1979).

M. PANIZZA, <<La cartografia tematica delle Scienze della Terra nella pianificazione territoriale>>; Mem. Soc. Geol. It., 37, p. 503 - 509 (1990).

A. PELLEGRINO, <<Proprietà fisico-meccaniche dei terreni vulcanici del Napoletano>>; atti VII Conv. Ass. It. Geotecnica, p. 113 - 114, Cagliari (1967).

- F. PENTA & G. DEL VECCHIO, <<Lave vesuviane dei principali centri estrattivi>>, Fond. Politecnica del Mezzogiorno, 14, p. 1 - 102 (1936).
- M. RICCIARDI, <<Prime acquisizioni di dati per una carta della vegetazione del complesso Vesuvio-Monte Somma>>; atti del Conv. - Mostra "Istituzione del Parco Naturale Vesuvio-Monte Somma", Amm.ne Prov. Napoli, p. 53 - 55 (1981).
- G. ROLANDI, <<Il rischio vulcanico nella fascia pedemontana del Somma-Vesuvio>>; atti del Conv. "Rischio vulcanico e programmazione territoriale", Amm.ne Prov. Napoli, (1987), p. 93-100 (1989).
- G. ROLANDI & F. RUSSO, <<Contributo alla conoscenza dell'attività storica del Vesuvio: dati stratigrafici e vulcanologici nel settore meridionale tra Torre del Greco-località Villa Inglese-e Torre Annunziata (Campania)>>; Boll. Soc. Geol. It., 108, p. 521-536 (1989).
- G. ROLANDI & F. RUSSO, <<L'eruzione del Vesuvio del 1631>>; Boll. Soc. Geol. It., 112, p. 315 - 332 (1993).
- M. ROSI & R. SANTACROCE, <<L'attività del Somma-Vesuvio precedente l'eruzione del 1631: dati stratigrafici e vulcanologici>>; in: "Tremblements de terre, eruptions volcaniques et vie des hommes dans la Campanie antique", Pubbl. Centre Jean Berard, Biblioteque de l'Institut Francais de Naples, ser. 12, 7, p. 15 - 42 (1986).
- M. ROSI, R. SANTACROCE & M.F. SHERIDAN, <<Volcanic hazard of Vesuvius, Italy>>; Bull. B.R.G.M., 4, p. 16-179 (1982).
- M. ROSI & A. SBRANA (Eds.), <<Phlegrean Fields>>; CNR, Quad. de "La Ricerca Scientifica", 114, Prog. Fin. Geodinamica, Monografie finali, 9, p. 1 - 168 (1987).
- F. RUSSO & M. VALLETTA, <<Rischio ed impatto ambientale: considerazioni e precisazioni>>; Boll. Serv. Geol. It., 112 (1993).
- R. SANTACROCE (Ed.), <<Somma-Vesuvius>>; CNR, Quad. de "La Ricerca Scientifica", 114, Prog. Fin. Geodinamica, Monografie finali, 8, p. 1 -243 (1987).
- R. SANTACROCE, <<Il contributo della ricerca per la realizzazione della carta del rischio del Vesuvio>>; atti del Conv. "Rischio vulcanico e programmazione territoriale", Amm.ne Prov. Napoli (1987), p. 63-66 (1989).
- R. SCANDONE, <<Dati storici sul Vesuvio e previsione statistica dell'attività eruttiva>>; atti del Conv. "I vulcani attivi dell'area napoletana", Amm.ne Prov. Napoli, (1977), p. 85-87 (1979a).
- R. SCANDONE, <<Il rischio da colate di lava ed implicazioni socio-economiche>>; atti del Conv. "I vulcani attivi dell'area napoletana", Amm.ne Prov. Napoli, (1977), p. 103-

106 (1979b).

R. SCANDONE, <<Problems related with the evolution of volcanic risk>>; in: H. TAZIEFF & J.C. SABROUX, <<Forecasting volcanic events>>, Developments in volcanology, 1, p. 57-67 (1983).

R. SCANDONE & M. CORTINI, <<Il Vesuvio: un vulcano ad alto rischio>>; Quad. de "Le Scienze", 4, p. 18-28 (1983).

M.F. SHERIDAN, F. BARBERI, M. ROSI & R. SANTACROCE, <<A model for plinian eruptions of Vesuvius>>; Nature, 289, p. 282-285 (1981).

M.F. SHERIDAN & M.C. MALIN, <<Application of computer-assisted mapping to volcanic hazard evaluation of surge eruptions: Vulcano, Lipari and Vesuvius>>; J. Volcanol. Geoth. Res., 17, 187-202 (1983).

H. SIGURDSSON, S. CAREY, W. CORNELL & T.S. PESCATORE, <<The eruptions of Vesuvius in A.D. 79>>; Nat. Geogr. Res., 1, p. 332-387 (1985).

G. SUPINO, <<Le reti idrauliche>>; Patron editore, Bologna (1965).

U.N.E.S.C.O., <<Report on consultative meeting of experts on the statistical study of natural hazards and their consequences>>; Document SC/ WS/ 500, UNESCO, 11 pp., Paris (1972).

R. VEZZOLI (Ed.), << Island of Ischia>>; CNR, Quad. de "La Ricerca Scientifica", 14, Prog. Fin. Geodinamica, Monografie finali, 10, p. 1 - 126 (1988).

*Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università "Federico II", Largo S.Marcellino, 10 80138 Napoli.

**Servizio Sorveglianza Geologica della Regione Campania, Via S.Lucia, 81 - 80132 Napoli.

***Ingegnere civile, libero professionista.

WEIGHTED REVERSE HOLDER INEQUALITIES

NOTA DI ARTURO POPOLI
PRESENTATA DAL SOCIO CARLO SBORDONE
ADUNANZA DEL 06/05/95

Riassunto.

Si determina il migliore esponente di sommabilità per le funzioni non decrescenti di una variabile verificanti una disuguaglianza di Holder al contrario rispetto a una misura assolutamente continua. Come applicazione, si calcola il migliore esponente di sommabilità per le classi A_p di Muckenhoupt.

Abstract.

The optimal higher integrability exponent, from a weighted reverse Holder inequality is computed, in the class of nonincreasing, nonnegative functions of one real variable. As a consequence, the best exponent of integrability in the Muckenhoupt's A_p class is computed.

Keywords : *Reverse Holder Inequalities, Hardy's inequalities, A_p classes.*

A.M.S. Classifications : 42 - B - 25 , 26 - D - 15

§ 1. INTRODUCTION

For $1 < q < \infty$ and $B > 0$, let $G_q(B, w)$ be the class of non negative functions f in $L^q_\mu(0, 1)$ verifying the *Reverse Holder Inequality*

$$(1.1) \quad \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^q(x) d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f(x) d\mu \right)$$

$\forall (a, b) \subset (0, 1)$, where

$$\mu(x) = \int_a^x w(t) dt$$

Let f be in $G_q(B, w)$. It is known (see [4]) that there exists $\varepsilon = \varepsilon(q, B)$ such that $f \in L^p_\mu(a, b)$ for any $(a, b) \subset (0, 1)$ and for any $p \in [q, q + \varepsilon[$.

When $w(x) = 1$, an asymptotic dependence of ε as $B \rightarrow 1$ has been obtained by Bojarski ([1], [2]) and Wik [13]. For a monotonic function f the exact value $\varepsilon(q, B)$ has been found by D'Apuzzo and Sbordone [7]. Namely, in [7], it is proved that a non increasing function f on $[0, 1]$, verifying (1.1) with $d\mu = dx$, belongs to the class L^p for any $p < p_0$ and the number $p_0 > q$ is defined as the root of the equation

$$(1.2) \quad 1 - B^q \frac{x - q}{x} \left(\frac{x}{x - 1} \right)^q = 0$$

where $x \in [q, +\infty[$. A.A. Korenovskii [8] proved that actually, in this result, the monotonicity assumption can be removed.

In the present paper we prove a similar result to that of D'Apuzzo and Sbordone for monotonic functions f on $[0, 1]$ in the class $G_q(B, w)$ (see Theorem 4.1). In fact, we show that, also in this case, the exact value of $\varepsilon(q, B)$ is given by the unique solution in $[q, +\infty[$ of the equation (1.2).

As a consequence, by using a relation between the class G_q and the Muckenhoupt's class A_p , we obtain a result, due to Korenovskii, on the best exponent of integrability in the A_p classes. As a by-product, we find a new relation between the equation (1.2) and the corresponding equation (5.3) for the best integrability in the A_p classes (see relation (5.5)).

§ 2. NOTATIONS AND PRELIMINARY RESULTS

A function $w : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$ locally integrable will be called a **weight function**. The function w generates the absolutely continuous Borel measure

$$\mu(x) = \int_a^x w(t) dt$$

with density w . We can consider the weighted Lebesgue space $L_\mu^p(a, b)$ given by the class of all measurable functions f such that

$$\int_a^b |f|^p d\mu < \infty$$

where $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ is an interval.

For real numbers $B, q > 1$ we define the **weighted Gehring class** of weight w

on the interval $(0,1)$ as the class $G_q(B, w)$ of all functions $f \in L_\mu^q(0,1)$ satisfying the *Reverse Holder's Inequality*

$$(2.1) \quad \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^q(x)w(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f(x)w(x)dx \right)$$

for any interval $[a,b] \subset [0,1]$.

From now on we are going to study the subclass $G_q^\downarrow(B, w)$ defined as the class of all nonnegative and nonincreasing functions $f \in L_\mu^q(0,1)$ satisfying (2.1).

We will define the truncated functions of f as

$$f_h(x) = \begin{cases} h & \text{if } f(x) > h \\ f(x) & \text{if } f(x) \leq h \end{cases}$$

and

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} k & \text{if } f(x) < k \\ f(x) & \text{if } f(x) \geq k \end{cases}$$

We can prove that the class $G_q^\downarrow(B, w)$ is closed with respect the operation of truncations.

Lemma 2.1

Let $f \in L_\mu^q(a,b)$ be a nonnegative and nonincreasing function on (a,b) and let $K > 1$ be a real constant such that

$$\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^q(x)w(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} = K \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f(x)w(x)dx \right)$$

If

$$C_K(f) = K^{\frac{q}{q-1}} \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f(x)w(x)dx \right)$$

then

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in [a,b]} f(x) \leq C_K(f) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} f(x)$$

Equality prevails if, and only if, f takes a.e. just one positive value, exactly given by $C_K(f)$.

Proof.

Let $m = \frac{1}{\mu(b)} \int_a^b fw$. By definition of K follows that

$$\int_a^b f^q w = K^q m^q \mu(b)$$

On the other hand, if we define

$$F(t) = \int_a^t fw$$

we obtain, integrating by parts, that

$$\int_a^b f^q w = \int_a^b fw f^{q-1} = [F(t) f^{q-1}(t)]_a^b - \int_a^b F(u) df^{q-1}(u) = m\mu(b) f^{q-1}(b) - \Theta$$

where

$$\Theta = \int_a^b F(u) df^{q-1}(u)$$

Comparing preceding equalities we deduce

$$K^q m^q \mu(b) = m\mu(b) f^{q-1}(b) - \Theta$$

For our assumptions, F is nonnegative and f nonincreasing, then Θ is a nonpositive term. Therefore

$$K^q m^q \mu(b) \geq m\mu(b) f^{q-1}(b)$$

so we conclude that

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in [a,b]} f(x) = f(b) \leq K^{\frac{q}{q-1}} m = C_K(f)$$

that proves first inequality of this lemma.

Now is clear that equality can prevail if and only if $\Theta = 0$ that is if and only if there exists $c \in [a,b]$ such that

$$\begin{aligned} f &= C (= \text{const.}) && \text{in } [a,c] \\ F &= 0 && \text{in } [c,b] \end{aligned}$$

Therefore $\Theta = 0$ if and only if f takes on just one positive value C . For our assumptions C has to satisfy following relations

$$\begin{aligned} C\mu(c) &= m\mu(b) \\ C^q \mu(c) &= K^q m^q \mu(b) \end{aligned}$$

that give us $C = C_K(f)$.

We have now just to prove second inequality. By setting

$$\bar{F}(t) = \int_t^b f w$$

and, integrating again by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \int_a^b f^q w &= -\left[\bar{F}(t) f^{q-1}(t)\right]_a^b + \int_a^b \bar{F}(u) df^{q-1}(u) = \\ &= -\left[-m\mu(b) f^{q-1}(a)\right] + \bar{\Theta} \end{aligned}$$

with evident definition of $\bar{\Theta}$. Then

$$K^q m^q \mu(b) = m\mu(b) f^{q-1}(a) + \bar{\Theta}$$

with $\bar{\Theta} \leq 0$. As before, we find

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} f(x) = f(a) \geq K^{\frac{q}{q-1}} m = C_K(f)$$

that completes the proof. \square

Theorem 2.1

A function f belongs to $G_q^\downarrow(B, w)$ if and only if truncated function f_h and \bar{f}_k both belong to $G_q^\downarrow(B, w)$ for every $h, k \geq 0$.

Proof.

If f_h and \bar{f}_k are in $G_q^\downarrow(B, w)$ for every $h, k \geq 0$, by Monotone Convergence Theorem f belongs to $G_q^\downarrow(B, w)$ too. Let therefore f belong to $G_q^\downarrow(B, w)$ and let us to prove that f_h and \bar{f}_k are in $G_q^\downarrow(B, w)$ for every $h, k \geq 0$. Starting with f_h , we have to prove that, for every $h > 0$,

$$\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h^q w \right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h w \right)$$

for every interval $[a, b] \subseteq [0, 1]$. Fix an interval $[a, b]$ and set

$$(2.2) \quad q(h) = \frac{\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h w}$$

and

$$(2.3) \quad K = \frac{\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f w} = q(0)$$

For assumption is $K \leq B$, then it is enough to show that $q(h) \leq K \quad \forall h > 0$. Let us first prove that

$$q(h) \leq K \quad \forall h \geq C_K(f)$$

with $C_K(f)$ defined as in Lemma 2.1.

Since f is nonincreasing, there exists a point $c \in [a, b]$ such that

$$f(x) > h \quad \text{for } x \in [a, c]$$

$$f(x) \leq h \quad \text{for } x \in [c, b]$$

so that $f = f_h$ in $[c, b]$ and

$$\int_a^b f_h w = \int_a^b f w - \int_a^c (f - h) w$$

Therefore

$$\begin{aligned} q(h) &= \frac{\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h w} = \\ &= \mu^{\frac{q-1}{q}}(b) \frac{\left(\int_a^b f_h^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\int_a^b f_h w} = \\ &= \mu^{\frac{q-1}{q}}(b) \frac{\left(\int_a^b f^q w - \int_a^c (f^q - h^q) w \right)^{\frac{1}{q}}}{\int_a^b f w - \int_a^c (f - h) w} = \end{aligned}$$

$$= \mu^{\frac{q-1}{q}}(b) \frac{\left(\int_a^b f^q w - \int_a^c f^q w + \int_a^c h^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\int_a^b fw - \int_a^c fw + \int_a^c hw}$$

It is now convenient to use following notation

$$m_y = \frac{1}{\mu(y)} \int_a^y fw$$

so that, from definition of K , we have

$$\int_a^b f^q w = K^q m_b^q \mu(b)$$

and, from Holder's inequality,

$$\int_a^c f^q w \geq m_c^q \mu(c)$$

Replacing in the previous sequence of equalities we find

$$\begin{aligned} q(h) &= \mu^{\frac{q-1}{q}}(b) \frac{\left(K^q m_b^q \mu(b) - m_c^q \mu(c) + h^q \mu(c) \right)^{\frac{1}{q}}}{m_b \mu(b) - m_c \mu(c) + h \mu(c)} = \\ &= K \frac{\left(m_b^q - K^{-q} (\mu(c) / \mu(b)) (m_c^q - h^q) \right)^{\frac{1}{q}}}{m_b - (\mu(c) / \mu(b)) (m_c - h)} = \end{aligned}$$

$$= K \frac{(m_b^q - K^{-q} v(m_c^q - h^q))^{\frac{1}{q}}}{m_b - v(m_c - h)}$$

with $v = \mu(c) / \mu(b)$. Let us introduce, for $u \geq h$, the auxiliary function

$$g(v, u, h) = (m_b^q - K^{-q} v(u^q - h^q))^{\frac{1}{q}} - (m_b - v(u - h))$$

and derive with respect to u . We find

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v \left[1 - K^{-q} u^{q-1} (m_b^q - K^{-q} v(u^q - h^q))^{\frac{1}{q}-1} \right]$$

Now $u \geq h$ implies

$$m_b^q - K^{-q} v(u^q - h^q) \leq m_b^q$$

and, by assumption $h \geq C_K(f) = K^{\frac{q}{q-1}} m_b$, easily follows that

$$u^{q-1} K^{-q} \geq h^{q-1} K^{-q} \geq m_b^{q-1}$$

From last two inequalities follows that

$$\frac{\partial g}{\partial u} \leq v \left[1 - m_b^{q-1} (m_b^q)^{\frac{1}{q}-1} \right] = 0$$

So g decreases in u and then

$$g(v, m_c, h) < g(v, h, h)$$

that is

$$\left(m_b^q - K^{-q} v(m_c^q - h^q)\right)^{\frac{1}{q}} - (m_b - v(m_c - h)) < 0$$

and, finally,

$$q(h) \leq K \quad \forall h \geq C_K(f)$$

In order to prove that inequality $q(h) \leq K$ holds for all positive h , let us define

$$h_0 = \inf \left\{ h_1 / q(h) \leq K \quad \forall h \geq h_1 \right\}$$

and show that $h_0 = 0$. We begin to prove that $h_0 \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in [a,b]} f(x)$.

If $h_0 > \operatorname{ess\,inf}_{x \in [a,b]} f(x)$, we consider a sequence (h_n) , converging to h_0 , such that

$$q(h_n) \leq K$$

For Monotone Convergence follows that

$$q(h_0) \leq K$$

where the equality holds for the continuity of $q(h)$. Otherwise, there exists an open interval containing h_0 in which every point satisfies the inequality, in contradiction with definition of h_0 , so

$$q(h_0) = K$$

Then condition (2.3) is satisfied by function f_{h_0} ; this means that is possible, as before, to truncate function f_{h_0} for every $h \geq C_K(f_{h_0})$ and preserve the inequality $q(h) \leq K$. But, since h_0 is defined as an infimum, certainly

$$C_K(f_{h_0}) \geq h_0$$

and, at the same time, being f_{h_0} truncated at h_0 , is $h_0 \geq \text{ess sup } f_{h_0}$ and we have

$$C_K(f_{h_0}) \geq \text{ess sup } f_{h_0}$$

Now lemma 2.1 leads to

$$C_K(f_{h_0}) = \text{ess sup } f_{h_0}$$

so f_{h_0} takes on just one positive value. In this condition is easy to show that is possible to truncate f_{h_0} below h_0 contrary to its definition. Then $h_0 \leq \text{ess inf}_{x \in [a,b]} f(x)$ from which easily follows that $h_0 = 0$.

Theorem is so proved for truncated functions f_h ; proof for \bar{f}_k is similar.

□

§ 3. HARDY TYPE INEQUALITIES

In this number we establish two new “weighted versions” of a classical Hardy’s inequality.

Theorem 3.1

Let g be a nonnegative function defined on (a,b) , p and q such that $p \geq q > 1$, and let $w \in L^1(0,1)$ a weight function. If

$$G(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_a^x g(t)w(t)dt$$

then

$$(3.1) \quad \int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p}-1} G^q(x)w(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^q \int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p}-1} g^q(x)w(x)dx$$

Proof.

Integrating by parts ($\mu' = w$), we have

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w &= \frac{p}{q} \left[\mu^{\frac{q}{p}} G^q \right]_a^b - p \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}} G^{q-1} G' = \\ (3.2) \quad &= \frac{p}{q} \mu^{\frac{q}{p}}(b) G^q(b) - p \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}} G^{q-1} G' = \\ &= \frac{p}{q} c - p \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}} G^{q-1} G' \end{aligned}$$

where $c = \mu^{\frac{q}{p}}(b)G^q(b) > 0$.

Since

$$\mu G' = gw - \mu' G = w(g - G)$$

then

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}} G^{q-1} G' = \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{q-1} gw - \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w$$

and in (3.2)

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w = \frac{p}{q} c - p \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{q-1} gw + p \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w$$

that is

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w = \frac{p}{p-1} \left[\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{q-1} gw - \frac{c}{q} \right]$$

Now, since $c/q > 0$, is

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w \leq \frac{p}{p-1} \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{q-1} gw$$

and, by Holder's inequality,

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{q-1} gw \leq \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^q w \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} g^q w \right)^{\frac{1}{q}}$$

From last two inequalities follows that

$$\left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p-1}} G^q w \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p-1}} g^q w \right)^{\frac{1}{q}}$$

and then the result raising both members to q . □

Remark 3.1

For $w \equiv 1$ relation (3.1) gives the classical Hardy's inequality

$$\int_a^b (x-a)^{\frac{q}{p-1}} \left(\int_a^x g(t) dt \right)^q dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \int_a^b (x-a)^{\frac{q}{p-1}} g^q(x) dx$$

Theorem 3.2

Let g a function as in Theorem 3.1 ; for $p \geq q > 0$, we have

$$\int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p-1}} G^{-q}(x) w(x) dx \leq \left(\frac{p+1}{p} \right)^q \int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p-1}} g^{-q}(x) w(x) dx$$

Proof.

As in Theorem 3.1 we find

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q} w = \frac{p}{p+1} \left[\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q-1} g w + \frac{c_1}{q} \right]$$

with c_1 positive constant. So

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q} w \geq \frac{p}{p+1} \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q-1} g w$$

On the other hand, Holder's inequality for conjugate exponents with negative product ($pp' < 0$ with $p = -q$) gives

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q-1} g w \geq \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q} w \right)^{\frac{q+1}{q}} \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} g^{-q} w \right)^{-\frac{1}{q}}$$

From last two inequalities follows that

$$\left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} G^{-q} w \right)^{-\frac{1}{q}} \geq \frac{p}{p+1} \left(\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} g^{-q} w \right)^{-\frac{1}{q}}$$

and then the result raising both members to $-q$. \square

§ 4. THE MAIN RESULT

The main purpose of this section is to prove the following

Theorem 4.1

Let $f \in G_q^\downarrow(B, w)$ and let $p_{q,B}$ be the unique solution in $[q, +\infty)$ of equation

$$\gamma(x) = 1 - B^q \frac{x-q}{x} \left(\frac{x}{x-1} \right)^q = 0$$

Then, for any interval $(a, b) \subseteq [0, 1]$,

- 1) $f \in L_\mu^p(a, b) \quad \forall p \in [q, p_{q,B})$
- 2) $\lim_{B \rightarrow 1} p_{q,B} = +\infty$
- 3) $p_{q,B} = \sup \{ p / f \in L_\mu^p(a, b) \forall f \in G_q^\downarrow(B, w) \}$

Proof of this theorem needs some preliminary results.

Lemma 4.1

Let $f \in G_q^\downarrow(B, w)$ be a nonnegative function in $L_\mu^\infty(0, 1)$. Then

$$(4.1) \quad \int_a^b \mu^{\frac{q}{r}-1}(x) f^q(x) w(x) dx \leq \frac{\mu^{\frac{q}{r}-1}(b)}{\gamma(p)} \int_a^b f^q(x) w(x) dx$$

Proof.

By using Gehring condition and Fubini's theorem

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(x) \left(\frac{1}{\mu(x)} \int_a^x f(t)w(t)dt \right)^q w(x)dx \geq \\
& \geq \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(x) \left(\frac{1}{B^q \mu(x)} \int_a^x f^q(t)w(t)dt \right) w(x)dx = \\
& = \frac{1}{B^q} \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-2}(x) \left(\int_a^x f^q(t)w(t)dt \right) w(x)dx = \\
& = \frac{1}{B^q} \int_a^b f^q(t) \left(\int_t^b \mu^{\frac{q}{p}-2}(x)w(x)dx \right) w(t)dt = \\
& = \frac{1}{B^q} \frac{p}{q-p} \int_a^b f^q(t) \left[\mu^{\frac{q}{p}-1}(x) \right]_t^b w(t)dt = \\
& = \frac{1}{B^q} \frac{p}{q-p} \left\{ \mu^{\frac{q}{p}-1}(b) \int_a^b f^q(t)w(t)dt - \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(t) f^q(t)w(t)dt \right\}
\end{aligned}$$

From theorem 3.1 we obtain

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p}-1} f^q(x)w(x)dx \geq \\
& = \frac{1}{B^q} \frac{p}{q-p} \left\{ \mu^{\frac{q}{p}-1}(b) \int_a^b f^q(t)w(t)dt - \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(t) f^q(t)w(t)dt \right\}
\end{aligned}$$

and, since $p/(q-p) < 0$,

$$\left[1 + B^q \frac{q-p}{p} \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \right] \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(t) f^q(t) w(t) dt \leq \mu^{\frac{q}{p}-1}(b) \int_a^b f^q(t) w(t) dt$$

from which we have the result. \square

Lemma 4.2

Let $f \in L^p_{\mu,loc}(0,1)$ be a nonnegative and nonincreasing function and $w \in L^1_{\mu}(0,1)$ a weight function. Then, for $1 < q < p$

$$(4.3) \quad \left(\int_a^b f^p(x) w(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} \int_a^b \mu(x)^{\frac{q}{p}-1} f^q(x) w(x) dx$$

Proof.

Let $g \in L^p_{\mu,loc}(0,1)$ be nonnegative and nonincreasing so that

$$\mu(x)g(x) \leq \int_a^x g(t)w(t)dt$$

Let us consider a concave function Φ ; so Φ' decreases and previous inequality give us

$$\Phi \left(\int_a^x g(t)w(t)dt \right) g(x)w(x) \leq \Phi'(\mu(x)g(x)) g(x)w(x)$$

Let us integrate in (a,b) . We find that

$$\Phi\left(\int_a^b g(t)w(t)dt\right) - \Phi(0) \leq \int_a^b \Phi'(\mu(x)g(x))g(x)w(x)dx$$

Now we choice $\Phi(t) = t^{\frac{q}{p}}$, so inequality becomes

$$\left(\int_a^b g(t)w(t)dt\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} \int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1}(x)g^{\frac{q}{p}}(x)w(x)dx$$

that is (4.3) for $g = f^p$. □

We are now able to prove theorem 4.1

Proof of theorem 4.1.

Let $f \in G_q^{\downarrow}(B, w)$; by using theorem 2.1, we can construct a sequence of nonincreasing functions $f_h \in L_{\mu}^{\infty}(0,1)$ such that $f_h \xrightarrow{h} f$ in $L_{\mu}^q(0,1)$ and

$$\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h^q w\right)^{\frac{1}{q}} \leq B \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f_h w\right)$$

for every interval (a,b) included in $[0,1]$ and with the same constant B. Applying lemma 4.1 to functions f_h we have that, for $p \in [q, P_{q,B})$

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} f_h^q w \leq \frac{\mu^{\frac{q}{p}-1}(b)}{\gamma(p)} \int_a^b f_h^q w$$

and, passing to limit for $h \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b \mu^{\frac{q}{p}-1} f^q w \leq \frac{\mu^{\frac{q}{p}-1}(b)}{\gamma(p)} \int_a^b f^q w$$

Now lemma 4.2 yields

$$\left(\int_a^b f^p w \right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} \frac{\mu^{\frac{q}{p}-1}(b)}{\gamma(p)} \int_a^b f^q w$$

that implies

$$\left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^p w \right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} \frac{1}{\gamma(p)} \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b f^q w \right)$$

so first statement of theorem is completely proved. The other statements of the theorem can be proved by the same arguments used in [7]. \square

5. APPLICATION TO MUCKENHOUP'T'S CLASS

Let A and p be two real numbers greater than 1 and let $A_p^\uparrow(A)$ be the class of nonnegative and nondecreasing functions $w \in L^{\frac{1}{p-1}}(0,1)$ such that

$$(5.1) \quad \int_a^b w(x) dx \left(\int_a^b w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq A \quad \forall (a,b) \subset (0,1)$$

This class is the **Muckenhoupt's class** and (5.1) is the Muckenhoupt's A_p -**condition**. For functions w in this class, as is well known, the *backward*

propagation property holds (see [10]), namely there exists a real exponent $q_{p,A}$ such that

$$(5.2) \quad \int_a^b w(x) dx \left(\int_a^b w^{-\frac{1}{q-1}}(x) dx \right)^{q-1} \leq c \quad \forall (a,b) \subset (0,1)$$

for every $q \in (q_{p,A}, p]$.

In 1992 A. Korenovskii solved the problem to find the exact value of $q_{p,A}$ for A_p^\uparrow class in the same way followed by L. D'Apuzzo and C. Sbordone for Gehring class G_q^\downarrow . This result was established by following

Theorem 5.1

For every function $w \in L^{-\frac{1}{p-1}}(0,1)$ ($p > 1$) nonnegative, nondecreasing and satisfying condition (5.1), inequality (5.2) holds for every $q \in (q_{p,A}, p]$, and number $q_{p,A}$ is the unique solution of equation

$$(5.3) \quad \frac{p-x}{p-1} (xA)^{\frac{1}{p-1}} = 1$$

By using Theorem 4.1 we can give a very simple proof of Korenovskii's result.

In fact, if $w \in A_p^\uparrow$ by definition

$$\int_a^b w(x) dx \left(\int_a^b w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq A \quad \forall (a,b) \subset (0,1)$$

This inequality can be rewritten equivalently

$$(5.4) \quad \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b w^{-p'}(x)w(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq A^{\frac{p'-1}{p'}} \left(\frac{1}{\mu(b)} \int_a^b w^{-1}(x)w(x)dx \right)$$

where $p' = p / (p-1)$, that is w^{-1} is in the Gehring class $G_q^\downarrow(B, w)$ where $B = A^{\frac{p'-1}{p'}}$ and $q = p'$.

From theorem 4.1, inequality (5.4) is verified for every $p \in [q, p_{q,B})$ where $p_{q,B}$ is the solution of equation

$$\frac{x-q}{x} \left(B \frac{x}{x-1} \right)^q = 1$$

Replacing values of q and B we have

$$(5.5) \quad \frac{x-p'}{x} \left(\frac{x}{x-1} A^{\frac{p'-1}{p'}} \right)^{p'} = 1$$

Since $p' = p / (p-1)$, by rewriting the equation “in terms of p ” and using linear transform $t \rightarrow t / (t-1)$ we obtain

$$\frac{p-x}{p-1} (xA)^{\frac{1}{p-1}} = 1$$

that completes the proof. □

REFERENCES

- [1] B. Bojarski, *Remarks on the stability of reverse Holder inequalities and quasi-conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., A, Math. 10, p. 291-296 (1985).
- [2] B. Bojarski, *On Gurov-Reshetnyak classes*, Proc. BMO - Seminar, Joensuu, Finland (1988).
- [3] B. Bojarski - T. Iwaniec, *Analytic foundations of the theory of quasi-conformal mappings in R^n* , Ann. Acad. Sci. Fenn., A, I, Math. 8, p. 257-324 (1993).
- [4] F. W. Gehring, *The L^p - integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math., 130, p. 265-277 (1973).
- [5] G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press (1964).
- [6] G. H. Hardy - J. E. Littlewood - G. Polya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*, Messenger of Math. 58, p. 145-152 (1929).
- [7] L. D'Apuzzo - C. Sbordone, *Reverse Holder Inequalities. A sharp result*, Rend. di Matematica, VII, 10, p. 357-366 (1990).
- [8] A. A. Korenovskii, *The exact continuation of a reverse Holder inequality and Muckenhoupt's conditions*, Math. Notes, 52 (5-6), p. 1192-1201 (1992).
- [9] G. MoscarIELLO - C. Sbordone, *A_∞ as a limit case of reverse Holder inequalities when the exponent tends to 1*, to appear on Ricerche di Matematica.
- [10] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., 165, p. 207-226 (1972).
- [11] C. Sbordone, *Some reverse integral inequalities*, Atti Acc. Pontaniana, Napoli, 33, p. 17-31 (1984).
- [12] C. Sbordone - I. Wik, *Maximal functions and related weight classes*, Publicacions Matematica, 38, p. 127-155 (1994).
- [13] I. Wik, *On Muckenhoupt's classes of weight functions*, Studia Math., 94, p. 245-255 (1989).
- [14] I. Wik, *Truncation of weight functions*, Preprint (1992).

MAXIMAL INEQUALITIES IN WEIGHTED ORLICZ SPACES

Nota di Claudia Capone e Alberto Fiorenza

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

Adunanza del 3 giugno 1995

Riassunto: Dimostriamo una disuguaglianza integrale per la funzione massimale negli spazi di Orlicz con peso, del tipo di Kerman-Torchinsky. Il risultato rappresenta una generalizzazione di una disuguaglianza provata da Buckley.

Abstract: We prove an integral inequality for the maximal function in weighted Orlicz spaces of Kerman-Torchinsky type. The result is a generalization of an inequality by Buckley.

Key words: Maximal inequalities, weighted Orlicz spaces, Muckenhoupt class A_p .

§1. Introduction.

For any $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ let Mf denote the Hardy-Littlewood maximal function of f , that is

$$(1.1) \quad Mf(x) = \sup_{x \in Q} \int_Q |f|$$

where the sup is taken over all cubes in \mathbf{R}^n containing x , and \int_Q stands for $\frac{1}{|Q|} \int_Q$. It is well known that M is a bounded operator in $L^p(\mathbf{R}^n)$, when $p > 1$. In 1972 B. Muckenhoupt ([8]) characterized the weights $w : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, such that M is bounded on $L^p(\mathbf{R}^n, wdx)$ ($p > 1$), as those verifying the A_p condition, i.e.

$$(1.2) \quad A_p(w) = \sup_Q \int_Q w \left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty$$

where the sup is taken over all cubes in \mathbf{R}^n containing x . A generalization to weighted Orlicz spaces was provided by Kerman-Torchinsky ([7]). In the following we present a different proof of their theorem, which gives a precise dependence of the constants in the resulting inequalities (see [1] in the particular case $F(t) = t^p$).

Theorem 1.1 *If $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex increasing function such that*

$$(1.3) \quad pF(t) \leq tF'(t) \leq qF(t) \quad \forall t > 0$$

with $1 < p \leq q$, and if w is a weight verifying the A_p condition, then

$$(1.4) \quad \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)w dx \leq c(n, p, q)[A_p(w)]^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f|)w dx$$

for any $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Moreover, the power $[A_p(w)]^{\frac{p}{p-1}}$ is the best possible.

We remark that as a consequence of Theorem 1.1 we get the following inequality:

$$(1.5) \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)[Mf]^{-\epsilon} dx \leq m(n, p, q, \epsilon) \int_{\mathbf{R}^n} F(|f|)[Mf]^{-\epsilon} dx$$

for any $\epsilon \in [0, 1[$ which can be used (see [4],[9]) to prove an uniqueness result for very weak solutions of the variational equation

$$\operatorname{div} \left(a(x) F'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0$$

where $a(x)$ is a bounded measurable function such that $0 < \lambda_0 \leq a(x) \leq \Lambda_0$.

§2. The main result.

We will use the following preparatory lemmas:

Lemma 2.1 ([1]) *If $A_p(w) < \infty$, then*

$$A_{p-\epsilon}(w) \leq c A_p(w)$$

for $\epsilon \sim [A_p(w)]^{-\frac{1}{p-1}}$ where c depends on n, p .

Lemma 2.2 ([1]) *If $A_p(w) < \infty$, then*

$$\int_{\{Mf > \alpha\}} w dx \leq \frac{c(n) A_p(w)}{\alpha^p} \int_{\mathbf{R}^n} |f|^p w dx \quad \forall \alpha > 0.$$

Lemma 2.3 ([5]) *If $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex increasing function such that $pF(t) \leq tF'(t) \leq qF(t) \quad \forall t > 0$ then there exists $c > 0$ such that $F(\lambda t) \leq c \max\{\lambda^p, \lambda^q\}F(t) \quad \forall \lambda, t \geq 0$.*

Now we prove Theorem 1.1 as follows:

Let f be such that $F(|f|) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, otherwise there is nothing to prove. Put

$$[f]_\lambda = \begin{cases} f & \text{if } |f| > \lambda \\ 0 & \text{if } |f| \leq \lambda \end{cases}, \quad [f]^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > \lambda \\ f & \text{if } |f| \leq \lambda \end{cases}$$

so that $f = [f]_\lambda + [f]^\lambda$. Since $A_p(w) < \infty$, by Lemma 2.1, there exists $\epsilon > 0$ such that $A_{p_0}(w) < \infty$ with $p_0 = p - \epsilon$. If $q_0 = q + \epsilon$, we have easily also $A_{q_0}(w) < \infty$ and therefore by Lemma 2.2 we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)w dx &= \int_0^\infty F'(\lambda)w(\{Mf > \lambda\})d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty F'(\lambda)w\left(\left\{M[f]_\lambda > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)d\lambda \\ &\quad + \int_0^\infty F'(\lambda)w\left(\left\{M[f]^\lambda > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)d\lambda \\ &\leq c(n)2^{p_0}A_{p_0}(w) \int_0^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{p_0}} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |[f]_\lambda|^{p_0}w dx\right) d\lambda \\ &\quad + c(n)2^{q_0}A_{q_0}(w) \int_0^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{q_0}} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |[f]^\lambda|^{q_0}w dx\right) d\lambda \\ &= c(n)2^{p_0}A_{p_0}(w) \int_0^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{p_0}} \left(\int_{|f|>\lambda} |f|^{p_0}w dx\right) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c(n)2^{q_0}A_{q_0}(w) \int_0^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{q_0}} \left(\int_{|f|\leq\lambda} |f|^{q_0} w dx \right) d\lambda \\
 & = c(n)2^{p_0}A_{p_0}(w) \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{p_0}} d\lambda \right) w dx \\
 & +c(n)2^{q_0}A_{q_0}(w) \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{q_0} \left(\int_{|f(x)|}^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{q_0}} d\lambda \right) w dx.
 \end{aligned}$$

By Lemma 2.3 we have:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{|f(x)|} \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{p_0}} d\lambda \leq q \int_0^{|f(x)|} \frac{1}{\lambda^{p_0}} \frac{F(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\
 & = q \int_0^{|f(x)|} \frac{1}{\lambda^{p_0+1}} F\left(\frac{\lambda}{|f(x)|} |f(x)|\right) d\lambda \\
 & \leq qc \int_0^{|f(x)|} \left[\frac{\lambda}{|f(x)|} \right]^{p-\frac{\epsilon}{2}} F(|f(x)|) \lambda^{-p_0-1} d\lambda \\
 & = \frac{qc}{|f(x)|^{p-\frac{\epsilon}{2}}} F(|f(x)|) \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-\frac{\epsilon}{2}-p_0-1} d\lambda \\
 & = \frac{qc}{p-\frac{\epsilon}{2}-p_0} F(|f(x)|) |f(x)|^{-p_0}
 \end{aligned}$$

and therefore

$$(2.1) \quad \int_0^{|f(x)|} \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{p_0}} d\lambda \leq \frac{2qc}{\epsilon} \frac{F(|f(x)|)}{|f(x)|^{p_0}}$$

On the other hand, still by Lemma 2.3, we have

$$\int_{|f(x)|}^\infty \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{q_0}} d\lambda \leq q \int_{|f(x)|}^\infty \frac{1}{\lambda^{q_0}} \frac{F(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 &= q \int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{q_0+1}} F\left(\frac{\lambda}{|f(x)|} |f(x)|\right) d\lambda \\
 &\leq qc \int_{|f(x)|}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{|f(x)|}\right]^{q+\frac{\epsilon}{2}} F(|f(x)|) \lambda^{-q_0-1} d\lambda \\
 &= \frac{qc}{|f(x)|^{q+\frac{\epsilon}{2}}} F(|f(x)|) \int_{|f(x)|}^{\infty} \lambda^{q+\frac{\epsilon}{2}-q_0-1} d\lambda = \frac{2qc}{\epsilon} \frac{F(|f(x)|)}{|f(x)|^{q_0}}
 \end{aligned}$$

Hence

$$(2.2) \quad \int_{|f(x)|}^{\infty} \frac{F'(\lambda)}{\lambda^{q_0}} d\lambda \leq \frac{2qc}{\epsilon} \frac{F(|f(x)|)}{|f(x)|^{q_0}}$$

So by (2.1), (2.2), we have

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)w dx &\leq c(n)2^{p_0} A_{p_0}(w) \frac{2qc}{\epsilon} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f(x)|)w dx \\
 &\quad + c(n)2^{q_0} A_{q_0}(w) \frac{2qc}{\epsilon} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f(x)|)w dx
 \end{aligned}$$

Now using Lemma 2.1, we have

$$\frac{A_{p_0}(w)}{\epsilon} = \frac{A_{p-\epsilon}(w)}{\epsilon} \sim [A_p(w)]^{1+\frac{1}{p-1}} = [A_p(w)]^{\frac{p}{p-1}}$$

and therefore, being $A_{q_0}(w) \leq A_{p_0}(w)$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)w dx \leq c(n, p, q) [A_p(w)]^{\frac{p}{p-1}} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f(x)|)w dx.$$

Theorem 1.1 is proved.

Remark. By using Theorem 1.1 of ([3]), it is easy to show that inequality (1.4) is true also with the inverse of the lower Boyd

index of F in the place of p and the inverse of the upper Boyd index of F in the place of q .

§3. An integral maximal inequality.

In this section we prove inequality (1.5) as a corollary of Theorem 1.1. We will give also another proof of (1.5) by using maximal inequalities proved in [6].

Let us first recall the following lemma, where the constant A_1 is defined as the limiting condition of A_p for $p \rightarrow 1$:

$$A_1(w) = \sup_Q \int_Q w \left(\operatorname{ess\,inf}_Q w \right)^{-1} < \infty$$

where the sup is taken over all cubes in \mathbf{R}^n containing x .

Lemma 3.1 ([2], see also [3]) *For any $\delta_0 \in]0, 1[$ there exists a constant $c(\delta_0)$ such that $(Mf)^\delta \in A_1 \forall 0 < \delta < \delta_0$ and*

$$(3.1) \quad A_1((Mf)^\delta) \leq c(\delta_0) \quad \forall 0 < \delta < \delta_0$$

for all $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

Since if w is an A_1 -weight then w is also an A_p -weight for all $p > 1$ and the inequality $A_p(w) \leq A_1(w)$ holds, by Theorem 1.1 and Lemma 3.1 we get the following

Proposition 3.2 *If $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex increasing function such that $pF(t) \leq tF'(t) \leq qF(t) \quad \forall t > 0$ with $1 < p < q$, then the following inequality holds for any $\epsilon \in [0, 1[$:*

$$(3.2) \quad \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)[Mf]^{-\epsilon} dx \leq m(n, p, q, \epsilon) \int_{\mathbf{R}^n} F(|f|)[Mf]^{-\epsilon} dx$$

Now we give another proof of inequality (3.2) with

$$m = 2 \left(c(n) 2^{q+1} \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} \right)^{\frac{\epsilon}{p - \epsilon}},$$

for any $\epsilon \in [0, p - 1[$. At first we prove the following lemma.

Lemma 3.3 *If $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex increasing function such that $pF(t) \leq tF'(t)$ with $p > 1$, then for any $0 \leq f \leq M$, $0 < \sigma \leq 1$, $0 < \epsilon < p$ the following inequality holds:*

$$(3.3) \quad F(f)f^{-\epsilon} \leq \sigma F(M)M^{-\epsilon} + \sigma^{-\frac{\epsilon}{p-\epsilon}} F(f)M^{-\epsilon}$$

Proof: If

$$\left(\frac{M}{f} \right)^\epsilon \leq \sigma^{-\frac{\epsilon}{p-\epsilon}},$$

then

$$\left(\frac{M}{f} \right)^\epsilon F(f) \leq \sigma^{-\frac{\epsilon}{p-\epsilon}} F(f) \leq \sigma^{-\frac{\epsilon}{p-\epsilon}} F(f) + \sigma F(M)$$

from which the assertion follows.

On the other hand, in the case

$$(3.4) \quad \sigma \left(\frac{M}{f} \right)^{p-\epsilon} \geq 1$$

by Lemma 2.3 we have

$$F(f) \left(\frac{M}{f} \right)^p \leq F \left(\frac{M}{f} f \right)$$

from which

$$F(f) \left(\frac{M}{f} \right)^\epsilon = F(f) \left(\frac{M}{f} \right)^p \left(\frac{M}{f} \right)^{\epsilon-p} \leq F(M) \left(\frac{M}{f} \right)^{\epsilon-p}$$

and therefore the assertion follows by using (3.4).

Next lemma gives a value of the constant appearing in the right hand side of the well known Hardy inequality in Orlicz spaces.

Lemma 3.4 *If $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex increasing function such that $pF(t) \leq tF'(t) \leq qF(t) \quad \forall t > 0$ with $1 < p < q$, then the following inequality holds for any $\epsilon \in [0, p-1]$:*

$$(3.5) \quad \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf) [Mf]^{-\epsilon} dx \leq c(n) 2^q \frac{p-\epsilon}{p-\epsilon-1} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f|) [f]^{-\epsilon} dx$$

Proof: If we put

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{F'(\tau)}{\tau} d\tau \quad \forall t > 0$$

we have (see [6])

$$(3.6) \quad \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf) dx \leq \frac{c(n)}{2} \int_{\mathbf{R}^n} 2f\Phi(2|f|) dx$$

and on the other hand

$$t\Phi(t) = t \int_0^t \frac{F'(\tau)}{\tau} d\tau = t \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\frac{p}{p-1} F'(\tau) - \frac{1}{p-1} F'(\tau) \right] d\tau$$

$$\begin{aligned} &\leq t \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\frac{p}{p-1} F'(\tau) - \frac{1}{p-1} \frac{F(\tau)}{\tau} \right] d\tau \\ &= \frac{p}{p-1} t \int_0^t \frac{F'(\tau)}{\tau} - \frac{F(\tau)}{\tau^2} d\tau \\ &= \frac{p}{p-1} t \left[\int_0^t \frac{1}{\tau} dF(\tau) - \int_0^t \frac{F(\tau)}{\tau^2} d\tau \right] = \frac{p}{p-1} F(t). \end{aligned}$$

Similarly, if we put

$$F_\epsilon(t) = \frac{F(t)}{t^\epsilon}, \quad \Phi_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{F'_\epsilon(\tau)}{\tau} d\tau \quad \forall t > 0,$$

it is easy to prove that

$$(p - \epsilon)F_\epsilon(t) \leq tF'_\epsilon(t),$$

and therefore we have

$$(3.7) \quad t\Phi_\epsilon(t) \leq \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} F_\epsilon(t).$$

Applying (3.4) to F_ϵ and Φ_ϵ we get, by using (3.7),

$$\int_{\mathbf{R}^n} F_\epsilon(Mf) dx \leq c(n)2^q \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} \int_{\mathbf{R}^n} F_\epsilon(|f|) dx$$

i.e.

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{F(Mf)}{(Mf)^\epsilon} dx \leq c(n)2^q \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{F(|f|)}{|f|^\epsilon} dx.$$

Lemma 3.4 is therefore proved.

Now we prove again the inequality (3.2).

Let us apply Lemma 3.3 to inequality (3.5), choosing

$$\sigma = \frac{1}{2^{q+1}c(n)} \frac{p - \epsilon - 1}{p - \epsilon}.$$

We get

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)[Mf]^{-\epsilon} dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)[Mf]^{-\epsilon} dx \\ & + \left(c(n)2^{q+1} \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} \right)^{\frac{\epsilon}{p-\epsilon}} \int_{\mathbf{R}^n} F(f)[Mf]^{-\epsilon} dx \end{aligned}$$

from which

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} F(Mf)[Mf]^{-\epsilon} dx \\ & \leq 2 \left(c(n)2^{q+1} \frac{p - \epsilon}{p - \epsilon - 1} \right)^{\frac{\epsilon}{p-\epsilon}} \int_{\mathbf{R}^n} F(|f|)[Mf]^{-\epsilon} dx. \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] S.M. BUCKLEY, "Estimate for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340**, 1, (1993), 253-272.
- [2] R.R. COIFMAN, R. ROCHBERG, "Another characterization of BMO", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**, 2, (1980), 249-254.
- [3] A. DOLCINI, "A uniqueness result for very weak solutions of p -harmonic type equations", to appear on *Boll. U.M.I.*

- [4] A. FIORENZA, "On very weak entire solutions of nonlinear partial differential equations", Preprint Dipartimento Matematica e Applicazioni Univ. Napoli, n. **38**, (1995).
- [5] A. FIORENZA, M. KRBEK "Indices of Orlicz spaces and applications", Preprint Dipartimento Matematica e Applicazioni Univ. Napoli, n. **10**, (1995).
- [6] L. GRECO, T. IWANIEC and C.SBORDONE, "Variational integrals of nearly linear growth", Preprint Dipartimento Matematica e Applicazioni Univ. Napoli, n. **20**, (1995).
- [7] R.A. KERMAN - A. TORCHINSKY, "Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function", *Studia Math*, **71**, (1982), 277-284.
- [8] B. MUCKENHOUPT, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207-226.
- [9] C. SBORDONE, "Maximal inequalities and Applications to Regularity Problems in the Calculus of Variations", Preprint Dipartimento Matematica e Applicazioni Univ. Napoli, n. **55**, (1994).

Claudia Capone and Alberto Fiorenza
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"R. Caccioppoli"
via Cintia - 80126 NAPOLI
ITALY

e-mail: capone1@matna2.dma.unina.it
fiorenza@matna2.dma.unina.it

ALCUNI TRATTI DELLA MATEMATICA NAPOLETANA
DA PRIMA A DOPO LA REPUBBLICA PARTENOPEA DEL 1799*

Nota di Paolo de Lucia¹ - Giovanni Ferraro² - Franco Palladino²

Presentata dal socio Paolo de Lucia

Adunanza del 3/6/1995

* Questa ricerca riprende i contenuti della relazione (preparata dai medesimi autori e letta in lingua francese da P. de Lucia) presentata al convegno internazionale *I matematici nella vita politica, 1789-1848*, svoltosi presso l'«Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"», Cortona, 10-14 ottobre 1994, gli atti del quale, secondo la dichiarazione degli organizzatori, non saranno pubblicati.

Riassunto. Diamo un quadro delle attività di studio e ricerca, nel campo delle scienze matematiche, condotte nel Regno di Napoli dalla seconda metà del XVIII^o secolo alla caduta del regno di Gioacchino Murat. Mostriamo che per quanto non vi fossero, nel Regno, cultori di rinomanza europea, ad eccezione forse di Nicolò

Fergola, vi era però attenzione e dibattito attorno alle nuove teorie matematiche e non trascurabile livello di diffusione della cultura matematica. Faremo pure notare che negli anni a partire dal 1799 il dibattito spesso veniva a caricarsi di forte valenza ideologica con l'intrecciarsi delle vicende politiche e scientifiche che videro i matematici in prima fila.

Abrégé. L'activité intellectuelle dans les domaines philosophique et scientifique a été très vivace dans le Royaume de Naples de la moitié du XVIII^m siècle jusq'à la fin du règne de Murat.

Par cette recherche nous donnons un aperçu sur les études en sciences mathématiques à Naples pendant cette période en essayant de montrer que même si parmi les mathématiciens napolitains on ne trouve pas de personnalités de renommée européenne, à part peut être Nicolò Fergola, ils ont été, quand même, ouverts aux innovations et attentifs aux nouvelles théories dans le calcul infinitésimal et en mécanique analytique.

La participation des savants napolitains, avant et pendant les événements du 1799, à l'activité politique et aux débats des idées est bien connue; dans ce papier nous donnons des détails sur l'oeuvre des mathématiciens en montrant que l'adesion aux idées révolutionnaires est souvent strictement liée au renouvellement dans le domaine des sciences.

ALCUNI TRATTI DELLA MATEMATICA NAPOLETANA

DA PRIMA A DOPO LA REPUBBLICA PARTENOPEA DEL 1799

Vi sono almeno due testimonianze, tra le altre, che rimandano all'importanza assunta dall'anno 1799 (che vide, a Napoli, sorgere e rapidamente cadere la repubblica giacobina) nelle vicende della matematica napoletana.

La prima, a carattere più generale, la riportiamo con le parole di Benedetto Croce che, nel descrivere la reazione borbonica ai moti repubblicani, annotò:

"Il re di Napoli (scrive con macabro umorismo il *Courier*) aveva «fatto impiccare tutta la sua accademia»; quel che ne sopravviveva, si trovava nelle fosse della Favignana o disperso per l'Italia e la Francia. La regina Carolina, autrice principale delle stragi e delle cacciate degli intellettuali [...], riandando l'accaduto diceva nel 1805 alla signora di Staël [...]: che la dinastia e i napoletani si erano inflitti reciprocamente tanti fieri colpi che ormai la fiducia era persa, e la prima delle due parti che tentasse di conciliarsi con l'altra non avrebbe trovato fede e sarebbe stata, dall'altra, sospettata di ascosa perfidia."⁴

La seconda testimonianza, indirettamente fornita nel trattare

....

⁴ Cfr. *Storia del Regno di Napoli*, Bari, Laterza, 1925, 1965⁶ p.239.

argomenti all'apparenza più neutrali ma che non per questo risulta essere meno impressionante, è di Vincenzo Flauti (1782-1863). Questi non ebbe mai simpatie per le rivoluzioni e pur caratterizzandosi, nel vivere civile, per l'attenzione rivolta al suo potere personale e ai suoi guadagni fu comunque un uomo franco e battagliero che col tempo entrò in contrasto anche con i burocrati del Borbone. Flauti afferma nelle *Memorie critiche*,² allorché intende descrivere lo Stato dell'istruzione pubblica nel Regno di Napoli, allo spirar del passato secolo:

"L'epoca infelice del 1799 fu limite della prosperità dell'istruzione pubblica nel nostro regno [...] e per supplire a' vuoti che la strage fatta di quelli aveva lasciati, si arrivò a conferire ad uno stesso professore interino [si intenda: nominato senza concorso] o anche *sostituito* due e tre cattedre."

Alla tragedia, politica e culturale, a cui accennano le precedenti testimonianze, va aggiunta una ulteriore considerazione.

L'indirizzo assunto, sia nella ricerca sia nell'insegnamento delle scienze matematiche nel Regno di Napoli, relativamente all'arco di tempo che va dalla fine del Settecento all'unità d'Italia, è stato, con una certa dose di approssimazione, fino ai

....

² Inserite nel volume dal titolo: *Anecdota*. Esso consiste in una raccolta di scritti redatti dal Flauti nel corso di vari anni e stampati senza alcuna indicazione editoriale. Ad ogni modo, con ottimo grado di approssimazione, si può pensare che la stampa di *Anecdota* avvenne in Napoli, presso la tipografia privata di Flauti, nel 1843. Il passo da noi citato è alle pp.13-14.

giorni nostri valutato enfatizzando esageratamente due episodi che toccano solo parzialmente le vicende napoletane.

Il primo è dovuto all'incolpevole Michel Chasles (1793-1880). Questi, nell'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*,³ viene ad esaminare quel "monument précieux des mathématiques anciennes", cioè le *Mathematicae collectiones* di Pappo di Alessandria e in particolare il settimo libro in cui sono numerosi gli esempi di applicazione del metodo dell'Analisi geometrica; esempi tratti dalle opere di Euclide, di Apollonio, di Eratostene, quasi tutte per intero o parzialmente perdute. E, al riguardo, il matematico francese commenta:

"De tous ces ouvrages, il n'est venu jusqu'à nous que les Données d'Euclide, le sept premiers livres des Coniques d'Apollonius, et son traité de la Section de raison. Mais, sur ce qu'en a dit Pappus, les autres ont été rétablis, au XVI^e siècle et au XVII^e, par divers géomètres, dans le style de la Géométrie ancienne."⁴

A tutto ciò Chasles fa seguire l'affermazione che qui riportiamo:

"Le goût de cette Géométrie, qui a donné tant d'éclat aux sciences mathématiques jusques il y a près d'un siècle, surtout dans la patrie de Newton, s'est affaibli depuis, et aurait

....

³ M.Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*. 1837. Noi citeremo dalla seconda edizione, Paris, Gauthier-Villars, 1875.

⁴ Ivi, p.46.

presque disparu, si les géomètres italiens ne lui fussent restés fidèles. On doit, de nos jours, au célèbre Fergola, et à ses disciples, MM. Bruno, Flauti, Scorza, plusieurs écrits importants sur l'Analyse géométrique des Anciens, qui s'y trouve rétablie dans sa pureté originaire [corsivo nostro]."

Chasles ritiene che la pratica di questo tipo di geometria contribuisca ad affinare lo spirito di semplicità e generalità che rappresenta il carattere distintivo delle nuove dottrine geometriche, la descrittiva e la proiettiva, che erano sorte e andavano progressivamente maturando in quel tempo.

L'altro episodio è rappresentato dalla polemica tra Gino Loria (1862-1954) ed Ernesto Pascal (1865-1940) avvenuta tra il 1892 e il 1893 attraverso le pagine dei volumi II e III della «Rivista di Matematica» poco prima fondata da Giuseppe Peano.

Gino Loria, spinto da "un senso di gradita meraviglia" e di "intensa curiosità" procuratigli dalla lettura del precedente brano di Chasles, pubblica il saggio dal titolo *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*.⁵ Nel fare ciò egli mette in risalto essenzialmente le ricerche nel settore della geometria, per il quale ha particolare competenza, e il valore della cosiddetta "Scuola sintetica napoletana".

Dal canto suo, Ernesto Pascal, che è un valente matematico ma non è uno storico, è condizionato dall'interpretazione, ristretta

....

⁵ Editto a Genova, per la Tipografia del R.Istituto Sordo-Muti, nel 1892, estratto dagli «Atti della R.Università di Genova» pubblicati, lo stesso anno, in occasione del Centenario colombiano. Per le citazioni fatte si veda la prefazione.

e ideologicamente marcata, data da Vincenzo Flauti all'insegnamento e alla ricerca praticati da Nicolò (o Nicola) Fergola (1753-1824), il quale invece si era applicato con altrettanta bravura a numerosi settori delle scienze matematiche. Pascal avrebbe dovuto sapere che l'insegnamento di Fergola valorizzò non solo la "Geometria degli antichi" e la nascente Geometria descrittiva ma anche il Calcolo infinitesimale con le sue applicazioni. Egli però è troppo preso, secondo noi, dalla volontà di mettere in luce i torti subiti dal suo maestro Giuseppe Battaglini (1826-1894), costretto a segnare il passo nelle sue aspirazioni accademiche a causa del clima culturale accentuatamente conservatore (e in ciò un'indubbia responsabilità era da addebitarsi anche al Flauti che esercitava, per quanto non sempre al massimo grado, un notevole controllo sull'Università e sull'Accademia delle Scienze).⁶

L'insieme delle testimonianze e degli episodi, a cui prima si è accennato, percepiti dall'esterno, hanno fatto pensare a un esercizio delle scienze matematiche piuttosto piatto e arretrato. Invece, pur presentando contraddizioni e chiaroscuri, l'attività scientifica, in Napoli e nelle province del regno, fu molto più ricca, almeno nei decenni che vanno tra fine Settecento e primo

....

⁶ Cfr. F. Palladino-G. Ferraro, *Giuseppe Battaglini matematico al tempo del risorgimento d'Italia* (con un'appendice di lettere inedite), in Atti del convegno: *Scienze in Italia 1840-1880. Una storia da fare*, Napoli, 2-5 novembre 1992, pubblicati per la II^a parte in «Quaderni PRISTEM / Documenti», n° 5 (marzo 1994), pp. 123-156.

Ottocento, intervallo di tempo a cui qui ci riferiamo.

Bisogna subito osservare che non soltanto Fergola, al quale si deve tanta parte della matematica trattata nel Regno di Napoli (poi Regno delle Due Sicilie) fino all'unità d'Italia, non fu "esclusionista nei suoi metodi", per dirla con l'espressione di Federico Amodeo,⁷ ma che a Napoli vi furono, per tutto quel tempo, diversi modi di guardare alla matematica favoriti anche

....

⁷ Il giudizio formulato da Amodeo (1859-1946) su Nicolò Fergola (cfr. *Vita matematica napoletana*, parte I^a, Napoli, F.Giannini e figli, 1905, cap.III; e parte II^a, Napoli, per la Tipografia dell'Accademia pontaniana, 1924, cap.I e Appendice: *I trattati didattici di N.Fergola*) è più equilibrato ed è fondato su una migliore competenza storica e più ricca documentazione. Ciò nonostante, l'Amodeo non esaminò, come pure non fecero né Loria né Pascal, i manoscritti matematici di Fergola pur avendo data notizia della loro esistenza in: *Origine e sviluppo della Geometria proiettiva*, «Giornale di matematiche» (Napoli), 3, voll.28-29 (1937-38); saggio che egli ripubblicò a Napoli, in volume, per l'editore Pellerano, nel 1939 (dove si accenna ai manoscritti alla nota posta a p.32). Ad ogni modo, per un esame di tali trattati manoscritti e degli altri inediti di Fergola, cfr. G.Ferraro-F.Palladino, *Sui manoscritti di Nicolò Fergola (1753-1824)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XIII (1993), fasc.2, pp.147-197; e ancora, degli stessi autori, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicolò Fergola*, Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, ed. La Città del Sole, 1995.

dalla compresenza pressoché costante di almeno due poli culturali: l'uno rappresentato dall'Università e dall'Accademia delle Scienze, l'altro dalle Scuole o Accademie militari; a tali istituzioni bisogna aggiungere la Scuola di Applicazione di ponti e strade, fondata nel 1811. Nelle scuole militari e in quella di applicazione l'indirizzo dato all'insegnamento fu, come ci si può aspettare, più pratico ed efficace. Si ebbe cura di insegnare i nuovi metodi mediante la pubblicazione di trattati "nazionali" (che non fossero semplici traduzioni, magari commentate, delle opere degli "oltremontani"), cosa che accadde in più alta espressione nel decennio dei regni napoleonidi, in particolare tra il 1813 e il 1815,⁸ al tempo di Gioacchino Murat.

Vogliamo ora, per prima cosa, esaminare nelle linee essenziali l'attività, nel settore delle scienze matematiche, esistente a Napoli prima del 1799.

Quando nel 1778 veniva fondata l'Accademia delle Scienze e Belle-Lettere di Napoli⁹ (ufficialmente inaugurata il 5 luglio

....

⁸ In tale intervallo di tempo furono stampati i dodici tomi del *Saggio di un Corso di Matematiche per uso della reale Scuola Politecnica e Militare*, presso la Stamperia dell'Istituto Politecnico e Militare diretta da L.Sangiaco, tra i quali ricordiamo il quinto: *Analisi a due coordinate* di Ferdinando De Luca; il settimo: *Analisi applicata a tre dimensioni* e l'ottavo: *Calcolo differenziale e integrale*, questi ultimi due entrambi di Ottavio Colecchi.

⁹ Intorno alla quale F.Palladino ha tenuto insieme ad E.Chiosi, nel febbraio del 1988, un seminario ("La reale Accademia delle

1780), il socio Matteo Barbieri dava contemporaneamente alle stampe le *Notizie storiche dei Matematici e Filosofi del Regno di Napoli*¹⁰ in cui, toccando il tema del baconismo scientifico ovvero, come si sa, del rapporto fra scienza, istituzioni scientifiche e potere politico, invitava gli scienziati e gli uomini di lettere a dare maggiormente prova del genio della nazione napoletana ora che il "Governo vi appresta i comodi".¹¹ Di pari passo, nell'ordinamento accademico, veniva assegnata la prima classe¹² alle "Matematiche pure e miste". Tale scelta non era casuale. Essa era un riflesso del clima culturale europeo che farà scrivere a Kant, pochi anni dopo, che "in ogni dottrina

....

Scienze e Belle-Lettere") presso l'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici di Napoli. Lo stesso autore ha, inoltre, in corso una vasta ricerca sullo stato delle scienze matematiche nel Regno di Napoli nel secondo Settecento. Sull'Accademia segnaliamo: E.Chiosi, "Humanitates" e scienze. *La Reale Accademia napoletana di Ferdinando IV: storia di un progetto*, «Studi storici», 2, 1989, pp.435-456; lavoro ripreso poi, con il titolo di *Lumen accessit*, in Idem, *Lo spirito del secolo. Politica e religione a Napoli nell'età dell'illuminismo*, Napoli, Giannini, 1992, pp.107-142.

¹⁰ Napoli, presso Vincenzo Mazzola-Vocola.

¹¹ Ivi, p.207.

¹² La seconda classe era quella di "Medicina e Chirurgia", la terza di "Istoria Antica", la quarta e ultima di "Mezzana Antichità".

della natura si può trovare solo tante scienza propriamente detta, quanta è la matematica che si trova in essa".¹³ La scelta scaturiva, inoltre, dal convincimento, diffuso in modo sempre più radicale (forse fino a rappresentare un novello mito), che la riduzione ai canoni delle scienze matematiche dovesse essere una opzione obbligata se si voleva il progresso della società civile.

Va osservato che la decisione dei fondatori dell'Accademia delle Scienze di Napoli di assegnare un ruolo primario alle matematiche, mentre risentiva principalmente del clima illuministico (e il contributo dato dagli illuministi napoletani, come per esempio Celestino Galiani, Pietro Giannone, Antonio Genovesi, Gaetano Filangieri, Ferdinando Galiani, alla cultura europea è noto e riconosciuto) rappresentava anche la manifestazione di un atteggiamento di cautela (scaturito dalla fiducia nella "neutralità" della matematica) che è reso più esplicito dalle righe scritte dal Conte [Giuseppe Angelo] di Saluzzo al suo Re, Vittorio Amedeo III, nel dibattere intorno alla formazione dell'Accademia delle Scienze di Torino:¹⁴

....

¹³ I.Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Riga, J.F.Hartknoch, 1786; trad. it. *Primi principi metafisici della scienza della natura*, a cura di L.Galvani (con introduzione di L.Geymonat), Bologna, Cappelli, 1959, p.11.

¹⁴ Cfr. V.Ferrone, *La reale Accademia delle Scienze di Torino: le premesse e la fondazione* (Appendice e Documenti) in *I primi due secoli dell'Accademia delle Scienze di Torino*, supplemento al vol.119 (1985) degli «Atti della Accademia delle Scienze di Torino - Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche», p.69.

"Per assicurare il governo da ogni disturbo tanto per le produzioni che si presenteranno all'accademia e da essa si pubblicheranno, quanto alla conservazione dell'armonia necessaria tra gli individui si è pensato in primo luogo a restringere le materie da trattarsi dagli accademici alle matematiche e alle scienze sperimentali e di osservazione, acciò non succeda mai che nessuno siavi il quale possa anche volendo, azzardare proposizioni le quali interessino la religione, il governo, o finalmente il costume; per questo effetto si è data l'esclusione a tutte quelle scienze, le quali o per la loro prossima connessione con questi oggetti così rispettabili e sacrosanti, o per l'estesa loro naturale libertà potessero facilitare le occasioni di inciampo."

Questa separazione (attuata anche dall'Accademia napoletana e ancora sopportabile ed efficace prima dei moti rivoluzionari del '99) contribuirà a mantenere un clima di "amistà che univa allora i dotti Napolitani, e che portavali a giovarsi l'un l'altro, e li rendeva così più rispettati" come successivamente rievocherà con rimpianto Vincenzo Flauti,¹⁵ per quanto, secondo noi, la

....

¹⁵ Cfr. V.Flauti, *Elogio storico di Nicolò Fergola*, Napoli, Dai torchi del Gabinetto Bibliografico e Tipografico, 1824, p.10.

Nel commentare lo Statuto dell'Accademia delle Scienze di Napoli, Giovanni Beltrani (cfr. *La R. Accademia di Scienze e Belle Lettere*, «Atti dell'Accademia Pontaniana», XXX (1900), Mem. n° 5, p.17) osserva invece: "Invano si cerca in tale Statuto un'ombra di libertà nelle discussioni degli accademici, nell'amministrazione, nelle pubblicazioni, nelle tornate. Ed è

testimonianza di Flauti va intesa in un senso molto relativo e va comunque limitata, più precisamente, al settore scientifico.

Vogliamo qui ricordare, per quanto concerne gli affari dell'Accademia, che ad opera del Marchese Domenico Caracciolo (1715-1789), ambasciatore del Regno di Napoli a Londra e a Parigi, poi viceré di Sicilia e successivamente primo ministro del Regno, fu rivolto l'invito a Lagrange a trasferirsi da Berlino a Napoli agli inizi degli anni ottanta. Ne dà notizia il medesimo Lagrange in una lettera a D'Alembert del 2 novembre 1782.⁴⁶ Scorrendo la lettera sembra che Lagrange abbia considerato con serietà la proposta che però, dopo il primo contatto, non venne più reiterata dagli ambienti napoletani.

L'Accademia delle Scienze, per l'effetto combinato di varie cause, tra le quali sono da annoverarsi: pesante burocratismo, spinto individualismo, propensione ad intrighi e complotti (pare che per questo vennero esclusi personaggi come Ferdinando Galiani, Gaetano Filangieri, Domenico Cirillo), non riuscirà per tutto lo scorcio del Settecento a dare buona prova di sé. Produrrà comunque due volumi non trascurabili. Il primo è rappresentato dall'*Istoria de' fenomeni del tremuoto avvenuto*

....

singolare non vedervi ammessa la classe di scienze morali e politiche. Così nella Patria di Pietro Giannone e di Giambattista Vico, si creava un'Accademia ufficiale, nella quale non avrebbero trovato posto le scienze filosofiche, economiche e giuridiche."

⁴⁶ Cfr. *Œuvres de Lagrange*, publiées par M.J.-A.Serret, Paris, Gauthier-Villars, 1867-1892, t.XIII, p.375.

nelle Calabrie, e nel Valdemone nell'anno 1783,¹⁷ l'altro, pubblicato nel 1788, è una raccolta di 14 memorie, di cui nove appartenenti alla prima classe.¹⁸ Di queste nove memorie, sei riguardano temi di matematica applicata trattati per la maggior parte con il Calcolo infinitesimale, come la *Misura delle volte a spira* di Fergola e *Del salire dei corpi in aria per la loro specifica leggerezza* di Girolamo Saladini (1736-1813), quest'ultima scritta praticamente in contemporanea con le ascensioni dei primi palloni aerostatici dei fratelli Montgolfier avvenute nel 1783-84. Le restanti tre memorie appartenenti alla prima classe sono: *Nuovo metodo di risolvere alcuni problemi di sito e posizione*, di Nicolò Fergola; *Continuazione del medesimo argomento*, affidata al giovane e brillante allievo di Fergola, Annibale Giordano (1769-1835), che la "recitò", pur non essendo ancora socio dell'Accademia, nel 1786; *Nuove ricerche sulle risoluzioni dei problemi di sito* di Fergola. Nel loro insieme, le tre memorie rappresentano le prime pubblicazioni relative all'originale linea di ricerca, in geometria sintetica, in base alla quale la tradizione ha ricordato fino ad oggi la scuola di Fergola.

....

¹⁷ Pubblicata da Michele Sarconi, segretario dell'Accademia, accusato di essersi appropriato dei contributi degli altri soci che con lui avevano partecipato alla spedizione in Calabria. L'*Istoria* fu edita in Napoli, presso Donato Campo, nel 1784.

¹⁸ *Atti della Reale Accademia delle Scienze e delle Belle-Lettere di Napoli dalla fondazione sino all'anno MDCCXXXVIII*, Napoli, Presso Donato Campo, 1788.

La decima memoria non riguarda, a rigore, propriamente le scienze matematiche ma vogliamo lo stesso accennarvi per il suo interesse scientifico. Trattasi delle *Osservazioni Fistiche concernenti l'elettricità, il magnetismo, e la folgore*, composta dal "socio pensionario" Giuseppe Saverio Poli (1746-1825), che l'aveva letta nel 1784. In essa si descrivono, nella parte iniziale, gli effetti prodotti dalle scariche di elettricità atmosferica (i fulmini) sugli alberi delle navi. Fenomeni osservati mentre l'autore attraversava "il picciol tratto dell'Oceano che divide la Francia dall'Inghilterra". Il Poli sottolinea che "trattavasi allora in Inghilterra, - dove egli si era recato nel 1779 - , con sommo impegno la controversia suscitata dal Dottor Wilson relativamente alle elettriche spranghe; cioè a dire se dovessero quelle terminare in palla, siccome egli pretendeva, ovvero farsi aguzze, secondo il metodo inventato dal celebre Franklin". Nel corso della memoria, l'autore descrive esperienze relative alla scarica elettrostatica condotte con semplici modellini riproducenti gli alberi delle navi e con l'ausilio di macchine elettrostatiche: "col mezzo della più poderosa macchina elettrica, che vi fosse in Londra (oggi esistente nel Gabinetto del Cavalier Vivenzio⁴⁹); la quale suol dar d'ordinario una scintilla della lunghezza di 12

....

⁴⁹ Giovanni Vivenzio (1737?-1815?). Nello Statuto dell' Accademia delle Scienze lo ritroviamo tra i soci onorari della prima classe, coi seguenti titoli: "Medico di S. M. la Regina, Medico ordinario de' Principi Reali, e Medico onorario del Re N. S., Direttore degli sperimenti."

pollici."

Per quanto riguarda le scuole militari, pur nel succedersi di nuove istituzioni, di fusioni, di cambiamenti di nomi e sedi, va constatato che esse vedono, con una continuità relativamente più salda rispetto all'Università, una evoluzione puntuale.

La loro nascita coincide all'incirca con la ritrovata autonomia del Regno di Napoli, nel 1734, con Carlo di Borbone. Esse vennero istituite sia per soddisfare l'esigenza di avere disponibili quadri tecnici specializzati per un esercito nazionale efficiente, sia per disporre di una più ampia base sociale con cui tentare di equilibrare il potere rappresentato dal fronte nobiliare.²⁰

Alle scuole militari furono dedicate risorse e attenzioni particolari. Va segnalato che quando negli anni sessanta del Settecento si aprì un approfondito dibattito sui modelli a cui conformare il nuovo esercito, Alonso Sanchez de Luna, duca di S.Armino, scriverà che la guerra era ormai diventata "un'Arte, e starei per dire una Scienza", alla quale serviva "per soccorso fin anche le matematiche discipline",²¹ espressioni che suonavano, *mutatis mutandis*, non diverse da quelle che allora si usavano per

....

²⁰ Su questo aspetto si veda E.Chiosi, *Il Regno di Napoli dal 1734 al 1799 in Storia del Mezzogiorno, IV: Il Regno dagli Angioini ai Borboni*, Roma Edizione del Sole, 1986, p.412.

²¹ *Lo spirito della Guerra, o sia l'arte di formare, mantenere e disciplinare la soldatesca: presto intrapendere o sostenere con vigore la guerra*, Napoli, Stamperia Simoniana, 1760, p.VIII.

la chimica o il commercio o l'agricoltura, ecc.²²

Molte cure furono indirizzate verso la riformata Accademia militare (costituitasi a seguito delle abolizioni del Battaglione Reale Ferdinando, del Real Collegio Fernandiano e della Reale Paggeria) trasferita con dispaccio del 28 maggio 1787 alla sede della Nunziatella²³ dove in precedenza vi era ospitato il Collegio

....

²² Non va dimenticato, ad esempio, l'auspicio di Antonio Genovesi (in *Discorso sopra il vero fine delle lettere e delle scienze*, del 1753, ristampato di recente in *Antonio Genovesi. Scritti economici*, a cura di M.L. Perna, Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, 1984, vol.I, p.35) affinché vi fossero delle accademie, nelle quali insieme cogli artisti e contadini intervenissero de' matematici e de' fisici, i quali dessero loro delle utili lezioni." Sul tema della matematica e della fisica al servizio dell'agricoltura e dell'economia si possono trovare altri riferimenti in R. Ajello - I. Del Bagno - F. Palladino, *Stato e feudalità in Sicilia*, Napoli, Jovene, 1992 (cfr. pp.229-236).

²³ Il nome *Nunziatella* (o *Annunziatella*) deriva da *Collegium Annuntiatæ Aeglense*, sede della scuola dei novizi della Compagnia di Gesù fino all'espulsione dei gesuiti dal Regno di Napoli avvenuta nel 1767. Echia, poi mutato poeticamente in Egle, nome di una Ninfa, fu detta la collina su cui sorgeva e ancora oggi sorge la Nunziatella. Su ciò cfr. F.Jappelli, *Collegium Annuntiatæ Aeglense*, «Societas» (Napoli), XLI, n° 3, pp.80-85. Sulla nuova accademia cfr. R.Pilati, *La Nunziatella*, Napoli, Guida, 1987.

Fernandiano.

La riforma venne effettuata sulla base delle indicazioni del colonello Giuseppe Parisi (allora comandante in seconda, ispettore agli studi e docente di architettura militare) che per questa ragione aveva effettuato un apposito viaggio di istruzione in Italia e in Germania per acquisire ulteriori esperienze sia sull'organizzazione dei collegi e delle scuole militari sia su "tutte le operazioni che riguardano il genio e lo scavo delle miniere."²⁴ L'Accademia verrà a possedere una "Biblioteca [...] ricchissima di tutto ciò, che si è scritto di Matematiche, di Fisica, dell'Arte della Guerra, di Storia, degli atti di tutte le Accademie d'Europa"²⁵ e di una "collezione di macchine e di modelli" scientifici. Il piano degli studi prevedeva, dopo i primi tre anni di studi elementari e letterari, successivi quattro anni in cui si impartivano gli insegnamenti di matematiche, fisica, chimica, logica, "scienza dei doveri", "geografia matematica e storica". Questi sette anni di studi erano comuni alle quattro armi: artiglieria, genio, fanteria e cavalleria. Gli ultimi tre anni erano caratterizzati in modo tale da specializzare gli allievi nella tattica militare, o nell'artiglieria, o nell'architettura civile e militare e il

....

²⁴ *Dell'Istituto della R. Accademia Militare di Napoli, Lettera al Cav. C***, Napoli, 1790, p.VIII. Su questi argomenti cfr. pure A.M.Rao, Esercito e società a Napoli nelle riforme del secondo Settecento, «Studi storici», 28 (1987), 3, pp.623-677.*

²⁵ *Dell'Istituto, cit., p.XLIV. La biblioteca costituisce oggi il "Fondo Nunziatella" della Biblioteca Nazionale di Napoli.*

terzo di questi anni era riservato in modo particolare alla formazione degli ingegneri.

Dal "Calendario di Corte" del 1789^{2o} si rileva che al quarto anno, cioè alla quarta classe, si insegnavano, tra l'altro, Aritmetica e Geometria piana; alla quinta classe Algebra finita e Geometria solida; alla sesta, Sezioni coniche, Calcolo differenziale e integrale, Trigonometria e Geometria pratica, alla settima Meccanica.

Vi erano anche, in Napoli capitale del Regno, importanti studi privati come quelli di Vito Caravelli (1724-1800) e di Nicolò Fergola che spesso costituivano un'alternativa allo Studio universitario. Si insegnava inoltre buona matematica in "Collegj e Seminari" come annotava Giacomo Giona Bjoernstaehl, professore di Filosofia all'università di Uppsala:

"Oltre la Università ci sono molti Collegj, e Seminari, dove vien eccellentemente educata la gioventù. Tra questi è particolarmente rinomato quello, che trovasi nel palazzo dell'Arcivescovo, ed ora Cardinale Sersale, chiamato il Seminario dell'Arcivescovado; egli ha per Rettore il dotto Signor Simioli [...]. Io ho sentito con piacere un pubblico esame di Matematica, che fu fatto a cinque scolari, de' quali tre erano dell'età di diciotto anni, e due di diciannove. Il Cardinal Sersale c'era egli stesso presente, e c'erano stati invitati quasi la metà de' Dotti della Città, e diversi personaggi d'alto affare. [...] Io conosco di molti Signori qui in Napoli, i quali profondamente s'avanzarono nella Matematica, tra' quali particolarmente mi

....

^{2o} Cfr. F. Amodeo, *Vita matematica*, cit., II, p.169.

piace il Signor Demarco, che ha solamente diciassette anni, e possiede già Euclide, l'Algebra, il conto [sic; ma si legga: Calcolo] integrale, e differenziale, l'Astronomia, la Fisica, e oltracciò, la lingua latina."²⁷

Buoni pubblici collegi (o licei, come saranno pure denominati) e seminari non mancavano, specialmente verso la fine del secolo XVIII, in tante città del Regno. I licei, che in alcuni casi assunsero al ruolo di Università poiché ad essi venivano annesse delle facoltà speciali che preparavano all'esercizio di professioni, sostituirono le soppresse scuole dei gesuiti dopo l'espulsione della Compagnia di Gesù dal Regno di Napoli.²⁸ Essi

....

²⁷ *Lettere ne' suoi viaggi stranieri di Giacomo Giona Bjoernstaehl Professore di Filosofia in Upsala, scritte al signor Gjørvell Bibliotecario regio in Istocolma, tradotto dallo svezese in tedesco da Giusto Ernesto Groskurd, e dal tedesco in italiano recate da Baldassardomenico Zini di Val di Non, Poschiavo, Per Giuseppe Ambrosioni, 1784, t.2^o, Che contiene la prima metà de' Viaggi per l'Italia, pp.135-136.*

²⁸ F.Amodeo, in *Vita matematica*, cit., I, pp.158-159, enumera molti Licei in cui era dato l'insegnamento delle matematiche. Oltre all'importante Liceo-convitto del Salvatore in Napoli (denominato pure *Università interna*), dove insegnava Fergola, egli cita quelli di Bari e di Salerno e le Università di Altamura e di Castro.

Flauti, in *Anecdota*, cit., accenna di sfuggita (p.16) ai molti collegi esistenti fino al 1799. Enumera poi dettagliatamente (pp.32-33) "diversi collegj, per la disciplina e l'insegnamento

rappresentavano anche il frutto di un certo attivismo, spesso velleitario e mal impostato, della consorte del re Ferdinando IV, Carolina d'Asburgo (sorella dell'imperatore d'Austria Giuseppe II e di Maria Antonietta d'Asburgo, moglie di Luigi XVI di Francia) e del suo *entourage*, mirante a dare modernità anche alle Province di un Regno nel quale le disfunzioni delle pubbliche istituzioni, il disordine civile e le iniquità rimanevano invece persistenti e accompagnati, nello specifico, dal valore morale non certo elevato della coppia regnante.

Non bisogna dimenticare, infine, oltre agli studi e agli esperimenti sull'elettricità condotti su posizioni di avanguardia in laboratori privati come in quello del citato Giovanni Vivenzio, un'altra piccola ma importante istituzione: il Collegio Ancarani di Bologna. Quest'ultimo era appartenuto ai Farnese di Parma e fu portato in dotazione da Carlo di Borbone quando questi, già duca di Parma, divenne poi re di Napoli. Esso serviva ad ospitare i giovani napoletani che intendevano seguire gli studi presso la città e l'Università di Bologna.

Tale istituzione consolidava il legame scientifico tra Napoli

....

assai meglio stabiliti che non lo sono ora", eretti durante i regni napoleonidi: uno in Napoli e "uno pur n'ebbe la provincia di Salerno, uno quella di Terra di Lavoro, stabilito in Maddaloni [...]. Gli Abruzzi n'ebbero in comune uno assai grandioso, situato nella badia di Sulmona, luogo attissimo ad uno stabilimento di simil fatta [...] due n'ebbero le Calabrie, uno in Catanzaro, l'altro in Cosenza; uno in Basilicata; uno la Terra di Otranto, ed un altro quella di Bari."

e Bologna,²⁹ avviato negli anni trenta da Celestino Galiani (1681-1753), zio di Ferdinando, divenuto Cappellano Maggiore del Regno (carica che afferiva al Ministero per l'Ecclesiastico e comportava, per il titolare, tra le altre competenze anche quella dell'amministrazione dell'istruzione pubblica quale Prefetto degli studi). Celestino Galiani organizzò l'invio di Pietro Di Martino (1707-1749), nel 1732, presso i fratelli Manfredi.³⁰ Ciò attiverà un proficuo circuito tra Napoli e Bologna, ricco di scambi culturali. A tale proposito, va ricordato che a Napoli ebbe uno studio privato di matematiche il già menzionato Girolamo Saladini, lucchese ma bolognese d'adozione, confratello di Celestino Galiani nella congregazione dei monaci celestini (facente parte dell'ordine benedettino). Il Saladini,

.....

²⁹ Al riguardo, F.Palladino ha recentemente tenuto una relazione: "Su taluni rapporti culturali nelle scienze matematiche tra Bologna e Napoli nel secolo XVIII" al convegno di studi: *La storia delle scienze matematiche a Bologna: ricerca, insegnamento, istituzioni*; organizzato dagli enti seguenti: CNR - CIS (Univ. di Bologna) - Dipart. di Matem. dell'Univ. di Siena, a Bologna, 5-7 dicembre 1994.

³⁰ Su ciò cfr. A.Brigaglia e P.Nastasi, *Bologna e il regno delle due Sicilie: aspetti di un dialogo scientifico (1730-1760)* in *Scienza e letteratura nella cultura italiana del Settecento*, a cura di R.Cremante e W.Tega, Bologna, 1984; e F.Palladino, *Tre lettere inedite di Gabriele Manfredi a Celestino Galiani sul calcolo infinitesimale*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», IV (1984) fasc.2, pp.133-144.

successivamente, mentre era professore all'Università di Bologna, ebbe come allievi al Collegio Ancarani numerosi giovani napoletani tra cui vanno segnalati Vincenzo de Filippis⁹¹ (1749-1799), cultore di matematiche che professò queste discipline anche al Liceo di Catanzaro, e Niccolò Fiorentino, giurista, messi a morte con la repressione seguita alla caduta della Repubblica partenopea, della quale de Filippis fu ministro degli interni.

Constatato che molti giovani napoletani aperti alle idee propagate dalla rivoluzione francese avevano fatto i loro studi a Bologna ospiti del Collegio Ancarani, si decise al volgere del Settecento di chiuderlo. La soppressione avvenne ad opera dell'Accademia delle Scienze la cui dotazione economica era fornita anche dalle rendite del Collegio Ancarani. Di questo provvedimento abbiamo trovato notizia in una relazione didattica su Vincenzo Flauti redatta da Nicolò Fergola il 4 ottobre 1809, rivolta al Ministro dell' Interno (da cui, con l'avvento dei francesi, fu fatta dipendere la pubblica istruzione):⁹²

....

⁹¹ Cfr. Anonimo [ma L. Telesio], *Elogio di Niccolò Fergola scritto da un discepolo*, Napoli, Appresso Trani, 1830, pp.223-224. Sul de Filippis si veda pure R. Mazzei, *Vincenzo De Filippis*, Roma, Gangemi, 1991. Altri giovani studenti napoletani allora allievi del Saladini sono menzionati da L. Telesio in *Elogio di Niccolò Fergola* (Napoli, Appresso Trani, 1830, p.223): Serafino Lanzo, Saverio Giovino, Tommaso Susanna, Domenico Ciardulli, Filippo Castellani.

⁹² Cfr. G. Ferraro-F. Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e*

"[...] Il Collegio Ancarani di Bologna, ove rimettevasi di qui non pochi Giovani per farsi nelle Matematiche, o Giurisprudenza instruire, fu abolito verso la fine del secol trascorso dall'Accademia Reale delle Scienze da poich  essi tornavan di l  per la piupparte ricchi di orgoglio, e poveri di Scienze."

Nel giudizio di Fergola (che con l'allievo Flauti occupava una posizione preminente all'Universit  degli Studi e all'Accademia delle Scienze) bisogna tener conto, secondo noi, del peso che derivava dall'essere egli favorevole alla valorizzazione e alla crescita di una cultura nazionale del regno, dall'essere devoto al Borbone e ancorato a un cattolicesimo vissuto in forma decisamente bigotta.

Qualche ulteriore riflessione pensiamo sia necessario fare su Fergola (il matematico napoletano pi  rappresentativo rispetto all'arco di tempo che stiamo considerando) e sugli indirizzi pi  significativi in scienze matematiche seguiti a Napoli in quel tempo.

Nel citato volume *Il calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicol  Fergola*, derivato dall'esame dei manoscritti inediti di Nicol  Fergola conservati presso le biblioteche napoletane, gli autori hanno sottolineato l'importanza del tentativo del matematico napoletano, compiuto tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento, di organizzare l'analisi infinitesimale "senza alterarne la natura [...] con quel metodo, e quel rigore di dimostrazione, con cui gi  scrissero della Geometria Euclide, ed

....

Lagrange, cit., pp.225-226.

Apollonio". Inoltre, è stato posto in evidenza che la chiave adatta per intendere la complessità di Fergola è costituita dalla multiformità del magistero di Antonio Genovesi tendente a trovare un equilibrio tra l'antica esperienza naturalista-sperimentalista degli investiganti, il newtonianesimo di Celestino Galiani, dei fratelli Nicolò e Pietro Di Martino, di Giuseppe Orlandi, e le tesi degli intellettuali che facevano capo all'Accademia degli Oziosi (tra i quali vi erano Paolo Mattia Doria e Giuseppe Pasquale Cirillo) radicati nel convincimento del primato epistemologico e didattico del modello e del metodo forniti dalla geometria di Euclide e di Apollonio. Questo tipo di geometria è proposto da Genovesi, tra gli altri scritti, nella *Logica per gli Giovanetti*, quale esempio più compiuto di metodo scientifico, applicabile a qualunque ramo del sapere. L'influenza epistemologica esercitata da Genovesi su Fergola si coglie già nell'opera a stampa dal titolo *Prelezioni sui principj matematici della filosofia naturale del cavalier Isacco Newton*.⁹⁸ L'opera rappresenta un pregevole testo di Meccanica razionale e Meccanica tecnica, come oggi si direbbe, al cui interno sono inanellati capitoli di Scienza delle costruzioni e di Idraulica. Le *Prelezioni* costituiscono per un verso la naturale evoluzione degli *Elementa statices* di Nicolò Di Martino, pubblicati nel 1727, opera nella quale il Calcolo infinitesimale trova pari dignità d'impiego rispetto ai metodi della geometria sintetica.

....

⁹⁸ In due tomi: t. I, Napoli, presso Giuseppe Maria Porcelli, Librajo, e Stampatore della R. Accademia Militare, 1792; t. II, Napoli, presso Giuseppe Di Bisogno, 1793.

Nelle *Prelezioni* accade che "le formule analitiche, che in simboli ampie verità naturali contenendo sogliono fecondar bene in nostra mente", dapprima relegate in nota (rispettando così la dichiarazione fatta nella prefazione) al modo di un calcolo parallelo, guadagnano ben presto il posto che a loro spetta nel testo, come se la necessità di una esposizione tecnico-scientifica adeguata e non forzata dall'impegno didattico prendesse la mano all'autore.

La Meccanica analitica (o Meccanica sublime, per ricorrere all'espressione di allora, in quanto studiata utilizzando il Calcolo sublime ovvero il Calcolo infinitesimale) costituì anche a Napoli, sul finire del Settecento, un campo di ricerca privilegiato. A tal proposito va ricordato la *Memoria sull'unità dei Principj della Meccanica*, scritta intorno al 1789 da Carlo Lauberg (1762-1834)³⁴ e probabilmente stampata in proprio (essa

....

³⁴ Questi che fu anche un apprezzato chimico, seguace delle teorie e dei metodi di Lavoisier, fece delle esperienze volte ad aprire una fabbrica di acido solforico, nel 1789 (su ciò cfr. F.Amodeo e B.Croce, *Carlo Lauberg ed Annibale Giordano prima e dopo la rivoluzione del 1799*, «Archivio Storico per le Province Napoletane», XXIII (1898), fasc. 1). Lauberg e Giordano "aprirono una scuola di chimica e di matematica, la quale servì potentemente a propagare le idee rivoluzionarie. Essa venne frequentata da Mario Pagano, dal De Deo e da tanti altri giovani e produsse i primi giacobini di Napoli", riferisce F.Amodeo in *Vita matematica*, cit., II, pp.61-62, dove si può leggere, inoltre, che Lauberg "andò via di nuovo da Napoli nell'aprile del

non reca note editoriali) sotto forma di saggio utile per l'autore a concorrere al posto di professore di Meccanica all'Accademia militare del Regno. Meno noti ma non meno significativi sono gli studi compiuti, in questo campo, dal menzionato Vincenzo De' Filippis autore *De' principj della Meccanica*, in tre libri, rimasti manoscritti (a cui si sono interessati Roberto Marcolongo e in tempi più recenti anche Dario Graffi)⁹⁵ e da Vincenzo Angiulli autore del *Discorso intorno agli equilibri*, un volume uscito a Napoli per la stamperia Simoniana nel 1770 e citato con debita considerazione da Carlo Lauberg nella sua *Memoria*. Esaminato il testo di Lauberg (diversamente da quello di Vincenzo de' Filippis che non ci è stato più possibile rintracciare) abbiamo avuto la possibilità di constatare che esso dà aggiornati e corretti riferimenti alla *Mécanique Analytique* (che è del 1788) di Lagrange e tende a stabilire sulla base del principio di minima azione e della conservazione delle forze vive "la dimostrazione di qualunque altro principio statico, o dinamico" con un'esposizione analitica densa e opportunamente concatenata.

Il lavoro di Lauberg è un'ulteriore esempio di quella costante compresenza effettiva, accanto ai "sintetici", di cultori dei metodi analitici nel Regno di Napoli.

La vicenda breve e tragicamente conclusasi della Repubblica

....

1799, e divenne e serbò l'ufficio di farmacista negli eserciti francesi e come tale venne in Italia coll'armata di Championnet".

⁹⁵ Su tutto ciò cfr. il citato volumetto di R. Mazzei, *Vincenzo De' Filippis*.

Partenopea dell'anno 1799 (durò dal 23 gennaio al 14 giugno di quell'anno) vide la partecipazione di molti uomini di scienza, tra cui, in prima linea, Annibale Giordano, Carlo Lauberg, quale presidente, e, come già detto, di Vincenzo de Filippis quale ministro dell'interno. Fu pure fondato, come in altri territori italiani raggiunti dall'esercito francese, un Istituto nazionale, a simiglianza dell'Institut National des Sciences et des arts sorto in Francia nel 1795. Alla prima classe (Scienze Matematiche) dell'Istituto appartennero, per effetto del decreto emesso dal generale Championnet, i "cittadini" qui indicati sulla base dell'elenco (in cui si nota qualche trascurabile alterazione ortografica) riportato da Camillo Minieri Riccio⁸⁶: "Niccola Fergola, Vito Caravelli, Vincenzo Porta, Filippo Castellano, Tommaso Susanna, Filippo Guidi, Annibale Giordano, Giuseppe Caselli, Niccola Massa, Giuseppe Sangro, Gabriele Martone, Niccola Pacifico".

La caduta della Repubblica Partenopea portò a una serie di esecuzioni capitali e a una prima diaspora di "uomini di

⁸⁶ Cfr *Cenno storico delle Accademie fiorite nella città di Napoli*, Napoli, Stab. Tipografico F.Giannini, 1879. Saggio estratto dall'«Archivio Storico per le Provincie Napoletane», anno III, fasc.4^o e seg. Dallo stesso saggio si ricava che alla seconda classe (Fisica, Storia Naturale, e Chimica), appartenevano: "Domenico Cirillo, Carlo Laubert, Niccola d'Andria, Domenico Cotugno, Luigi Parisi, Melograno, Savarese, Giuseppe Pepe, Saverio Macri, Onorato Candista, Giovanni Moia, Eliseo [della Concezione] Teresiano scalzo."

lettere", alcuni dei quali ritornarono in Napoli con l'insediarsi del regno di Giuseppe Napoleone, fratello di Napoleone Bonaparte, nel 1806.

Furono messi a morte, per citarne alcuni, oltre ai già ricordati de Filippis e Fiorentino, il botanico Nicola Maria Pacifico (1734-1799)⁹⁷, il medico e naturalista Domenico Cirillo (1739-1799). Fu incarcerato Vincenzo Porto (1747-1801), matematico allievo del Caravelli, divenuto poi direttore degli studi del Collegio di marina, autore non solo di un trattato sul calcolo integrale⁹⁸ ma anche di uno sulla navigazione, in 16 volumi lasciati manoscritti e andati perduti, e, inoltre, capace di "far camminare per sei miglia la carrozza per mare", cioè di realizzare di prototipi di navi a vapore, munite delle caratteristiche ruote laterali, cosa che avrebbe compiuto durante il suo soggiorno a Cartagine in Spagna (sede della *Escuela de Guardamarinas*), tra il 1785 e il 1787, dove era stato chiamato per il riordino di quella struttura portuale. Vincenzo Porto, scarcerato nel maggio del 1801, morì il successivo 17 agosto.⁹⁹

.....

⁹⁷ Cfr. G. Beltrani, *La R. Accademia di Scienza e Belle lettere*, cit., p. 81.

⁹⁸ *Trattati del Calcolo differenziale di Vito Caravelli e del Calcolo integrale di Vincenzo Porto*, Napoli, Raimondi, 1786, vol. unico.

⁹⁹ Cfr. G. Porto, *Cenni biografici di alcuni uomini illustri oriundi del villaggio di Faicchio, Piedimonte d'Alife*, Tipografia fratelli Bastone, 1875, pp. 24-30.

Tra coloro che riuscirono a fuggire ricordiamo Giuseppe Grippa, buon matematico, professore al Liceo di Salerno, che raggiunse il Piemonte da dove non fece più ritorno, e Filippo Guidi (1753-1837) "tratto dai fossi di Castel nuovo nell'ultimo funestissimo dello scorso secolo, gettato sopra una barca con altre vittime per essere abbandonato sulla spiaggia di Marsiglia".⁴⁰ Il Guidi, che in Francia insegnò in vari licei (e dove pare abbia sposato la sorella di S.F. Lacroix) fu tra i matematici che fecero ritorno a Napoli dove, alcuni anni dopo, ricoprì la cattedra di Introduzione all'Analisi sublime, cosa che abbiamo potuto riscontrare dalla documentazione esistente presso l'Archivio di Stato di Napoli.⁴¹

E anche il caso di ricordare che tra i cultori di studi scientifici che furono costretti a riparare all'estero vi furono il più volte menzionato Lauberg e Annibale Giordano. Va osservato che mentre il primo fu contrastato (per esempio nella sua aspirazione a divenire professore dell'Accademia militare) dal bigotto Fergola per essere un ex frate scolopio che aveva avuto

....

⁴⁰ Cfr. C. Dalbono, *Del movimento scientifico in Napoli nell'ultimo secolo 1750-1850*, in *Scritti vari di Cesare Dalbono*, Firenze, Le Monnier, 1891, p.117.

⁴¹ Cfr. G. Ferraro-F. Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange*, cit., p.221. G. Orloff, in *Mémoires Historiques, Politiques et Littéraires sur le Royaume de Naples*, publié, avec des notes et additions par A. Duval, à Paris, chez Chasseriau, 1821, al t.V, p.26, scrive al riguardo del Guidi: "Il professa dans les meilleurs lycées de France avec succès."

persino l'ardire di prendere moglie, il secondo invece fu uno degli allievi prediletti di Fergola. Lauberg e Giordano furono comunque accomunati da forte sodalizio personale, scientifico e politico. Insieme aprirono una scuola privata, a cui si è accennato, scrissero un testo didattico⁴² e fondarono circoli giacobini a Napoli.

Il Giordano ebbe una certa notorietà in Europa per aver risolto elegantemente, col metodo dell'Analisi geometrica (l'"Analisi degli antichi"), il cosiddetto "Problema di Cramer" e per averne dato, con eleganza, la generalizzazione.⁴³ La bella prova del Giordano fu utilizzata dai "sintetici" a proprio favore, come ulteriore strumento di lotta, per affermare la superiorità del loro metodo.⁴⁴ Essa è stata poi considerata, con

....

⁴² *Principii Analitici delle Matematiche di Annibale Giordano e Carlo Lauberg, Napoli, G.Giaccio, 1792.*

⁴³ *Cfr. Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano, e risoluzione di alquanti altri problemi affini del sig. D. Annibale Giordano di Ottatiano in «Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana [delle Scienze detta dei XL]», Verona, IV (1788), pp.4-17.*

⁴⁴ *Per rispondere alle critiche che in Napoli provenivano dagli avversari, due degli allievi di Fergola più quotati, Flauti e Felice Giannattasio (1759-1849), curarono la pubblicazione degli Opuscoli matematici della Scuola del Sig. r N. Fergola. Parte già pubblicati, e parte inediti, Napoli, Stamperia Reale, 1811 (per ulteriori considerazioni su tali Opuscoli cfr. G.Ferraro-*

superficialità da una certa tradizione storiografia, come elemento per incasellare la matematica napoletana entro lo stretto confine della geometria sintetica in cui ogni uso dell'algebra era bandito. Per queste ragioni intendiamo illustrare un po' più diffusamente il lavoro del Giordano. Egli comincia il suo articolo scrivendo con candore:

"Le ricerche geometriche, che qui mi son proposto esporre, da altro principio non nacquero, che da un problema famoso sì per la sua eleganza, che per essere stato l'oggetto delle occupazioni de' sommi Geometri Castillon, la Grange, Euler, Fuss, Lxel: eccone brieve istoria.

Il Sig. Cramer,⁴⁵ rinomato Analista, e degno Professore in Ginevra, propose nel 1742 al Sig. de Castillon⁴⁶ il problema di inscrivere in un circolo un triangolo rettilineo, i di cui lati distesi passassero per i punti dati: impegnandone codesto Geometra a risolverlo coll'analisi degli antichi (forse perché se

....

F. Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange*, cit., pp. 139 e 204-205). In questa raccolta, il lavoro del Giordano è riportato per primo. Seguono poi l'opuscolo II: *Giudizio degli editori sulle varie soluzioni del Problema del cerchio e de' tre punti prodotte da Geometri illustri*; e il terzo: *Del Signor D. Giuseppe Scorza: Nuove speculazioni sull'istesso argomento*.

⁴⁵ Gabriel Cramer (1704-1752).

⁴⁶ È il toscano Giovanni Francesco Mauro-Melchior Salvemini (1708-1791) da Castiglion Fiorentino, che, rifugiatosi a Losanna, assunse il nome di Johannes Castilloneus.

ne sembrava sterile qualunque giudiziosa applicazione di quella de' moderni) [...] ardi tentare lo snodamento dell'istesso concepito sotto aspetti incomparabilmente più universali, ed impiegarmi in questo delicato, e piacevole lavoro in quelle poche ore, che mi era permesso vacare dalle serie, e dure occupazione analitiche."

Dopo di che il giovane matematico napoletano aggiunge:

"[...] doversi il Geometra esercitare sì nel metodo sintetico, che nell'analitico per serviserne poi, come più gli riesce comodo, nelle occasioni."

L'articolo di Giordano era accompagnato da una nota del presentatore, Anton Maria Lorgna (fondatore e presidente della "Società Italiana delle Scienze", detta pure "dei XL", e direttore delle relative *Memorie*) che diceva:

"Questo scritto è stato mandato da Napoli alla Società dal Sig. Ball Co.[nte] de' Sagramosi fin dal 2 Ottobre del 1787, sicché il Geometra che n'è l'Autore il compose nella tenera età di poco più che sedici anni. Parvemi pertanto dicevole il dargli luogo negli Atti della Società sì per questo, che per essere stati occupati intorno allo stesso soggetto prima del nostro giovanetto diversi illustri matematici, e sì ancora per il di più ch'egli fece risolvendo il Problema principale in tutta la sua generalità con facile metodo, che ricorda non già propriamente la sintesi, ma l'analisi degli antichi."

Non era affatto sintomo di arretratezza culturale ciò che spingeva Fergola, Giordano e altri ad interessarsi pure di questi aspetti della Matematica. Essi erano spinti piuttosto dall'esigenza di tener conto di una fondamentale questione -

postasi con particolare lucidità e nettezza al comparire della *Géométrie* di Descartes -, e cioè se ritenere o no risolto un quesito geometrico nel caso che avendone prodotto algebricamente la soluzione, espressa da un'equazione o comunque da una formula, non si era però proceduto a dare anche una "costruzione" del risultato algebrico; vale a dire, non si era indicata la serie dei procedimenti geometrici capaci di esibire la soluzione. La questione, quindi, era sul se andava ancora rispettata o no l'originaria definizione di Pappo alessandrino: "Problema est propositio in qua aliquid proponitur faciendum et construendum".⁴⁷

Sotto questo aspetto la soluzione del "Problema di Cramer" fornita da Lagrange per via trigonometrica risultava così complicata che, sembra, anche Eulero pensò di dover esprimere dei dubbi sulla costruibilità della stessa.

L'origine del cosiddetto "Problema di Cramer" sta nella proposizione 117 del libro VII delle *Collezioni matematiche* di Pappo alessandrino.⁴⁸ Essa dice: "Circulo ABC positione dato; et datis tribus punctis DEF in recta linea, inflectere DAE, et facere BC in directum ipsi CF".⁴⁹ In Pappo il problema è

....

⁴⁷ Cfr. *Pappi alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino urbinatense in latinum conversae, et commentarijs illustratae*, citiamo dall'edizione di Bologna, ex typographia HH. de Duccijs, 1690, p.1.

⁴⁸ *Ibidem*, pp.343-345.

⁴⁹ Vale a dire: "Siano dati di posizione una circonferenza e tre punti D, E, F allineati, spezzare il segmento di retta DAE e fare

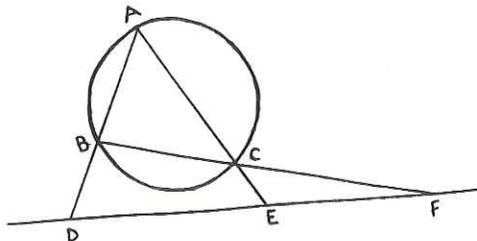
affrontato, classicamente, prima col metodo dell'analisi geometrica (o metodo di risoluzione, come pure si dirà), supponendolo come già risolto: "Factum iam sit". Poi esso è affrontato, inversamente, per via sintetica ovvero col metodo di composizione: è data la costruzione accompagnata dalla dimostrazione della validità della stessa costruzione.

Annibale Giordano inizia la sua trattazione risolvendo (con la sola analisi geometrica) il problema così come enunciato da Pappo. Poi estende il problema al caso in cui i tre punti DEF non siano allineati ma di essi se ne conosca soltanto la collocazione nel piano (siano "dati di sito"). In questo caso egli dà, oltre alla soluzione per via dell'analisi anche quella per via di sintesi, cioè dà la composizione del problema: composta, classicamente, dalla costruzione e dalla dimostrazione. Il lavoro di progressiva generalizzazione del Giordano si conclude con la soluzione, per la sola via dell'analisi, del problema "universale", enunciato nei seguenti termini:

"In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque dato numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati comunque di sito."

....

in modo che il segmento BC sia sul prolungamento di CF".



Lagrange, nell'affrontare la soluzione del medesimo problema,⁵⁰ assume che la circonferenza sia data non solo di sito (mediante assegnazione del centro di essa sul piano di appartenenza) ma anche di grandezza (assegnandone anche il raggio) mentre "i tre punti" per cui passano i prolungamenti dei lati del triangolo inscritto sono dati di sito e sono non allineati. Il metodo scelto da Lagrange è quello dell'analisi. Analisi che però non è geometrica ma algebrica (non a caso egli intitola la sua soluzione: *Solution algébrique*) ed è condotta utilizzando strettamente formule trigonometriche (teorema dei seni, formule di addizione e sottrazione di funzioni trigonometriche, ecc.). Le formule risolutive a cui egli perviene effettuando delle sostituzioni di variabili non sono certo di facile costruibilità per quanto siano di secondo grado e "par conséquent résoluble par la règle et le compas".

Nell'articolo citato, *Del movimento scientifico in Napoli*, Cesare Dalbono afferma:⁵¹

"Non sono così giovane da ignorare i grandi combattimenti

....

⁵⁰ Egli assume per enunciato la seguente proposizione: "Étant donné de grandeur et de position le cercle RMNP, inscrire dans ce cercle un triangle MNP, dont les trois côtés NM, PM, PN, prolongés s'il est nécessaire, passent par trois points donnés A, B, C (cfr. *Solution algébrique d'un problème de Géométrie*, «Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin», 1776, in *Oeuvres de Lagrange*, cit., t.IV, pp.335-339).

⁵¹ P.118.

sull'analisi che presero la forma di avvisaglie, di duelli, di giostre, nelle quali come vediamo oggi nel fetido campo della politica, le opinioni scientifiche ammantavano e nascondevano interessi particolari di un uomo o di un partito, ambizioni di potere e di denaro, di questo e di quello."

Il riferimento temporale specifico a cui rimanda l'affermazione di Dalbono è abbastanza spostato rispetto all'anno 1799 e ai venti anni di durata dei regni napoleonici, terminati nel 1815 col ritorno del Borbone. Esso è costituito dal decennio che va dal 1830 al 1840. Periodo in cui le dispute scientifiche erano comunque, come al solito, un aspetto della lotta contro quegli uomini di scienze, quale ad esempio Vincenzo Flauti, inquadrati, in posizione predominante, nel sistema di un potere politico sempre più degenerato. Lotta che veniva condotta, ancora negli anni trenta, dall'anziano Ottavio Colecchi (1773-1847) a cui si era aggiunto il più giovane Fortunato Padula (1815-1881). Spesso sembrava che i diversi metodi e concetti matematici venissero come materializzandosi in oggetti contundenti da scagliarsi contro.

Va notato, per inciso, che frequentemente i temi scientifici e matematici (con le più o meno sottese ragioni dei vari interlocutori) trovavano posto non soltanto sulle riviste specializzate ma pure sui vari e numerosi periodici politici e di informazioni che, in vario numero, si andavano pubblicando in Napoli dal 1799 e per i decenni a seguire. Senza nessuna pretesa di essere esaustivi, vogliamo citare le informazioni scientifiche offerte dal *Giornale estemporaneo* che, per esempio, nel numero 6 (Napoli 15 Fiorile anno 7, cioè 4 Maggio 1799) sotto il titolo di

Produzioni matematiche dà notizia delle ricerche analitiche, in Teoria dei numeri, condotte da Legendre e insieme annuncia che "Il Cittadino Lagrange ha pubblicato simultaneamente un'opera nuova sull'analisi determinata, sulla risoluzione, cioè, delle equazioni numeriche."⁵² *Il Lucifero* (il cui sottotitolo è: Giornale scientifico, letterario, artistico, industriale), anno secondo (n°13, Mercoledì 8 Maggio 1839), presenta tutte e tre "le quistioni", proposte dal Flauti a metà tra il concorso e la disfida, nel suo "Programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica presentato a' matematici del Regno delle due Sicilie nell'Aprile del 1839". Così l'*Omnibus* (numero 27-28, anno nono), presenta un articolo, col titolo *Il metodo sintetico e l'analitico*, che inizia così:

"Nel VII fasc. degli annali di fisica, chimica e matematiche che si pubblicano in Milano dal chiar. prof. G.A. Majocchi si legge un lungo articolo relativo a talune produzioni di due nostri giovani Matematici. Ci è quindi sembrato ben fatto di qui riprodurlo identicamente, persuasi che si debba recar soddisfazione il veder valutati quei nostri ingegni, che coltivano con zelo scienze così cospicue."

L'articolo riprodotto prende in considerazione il lavoro di Nicola Trudi (1811-1884) sul *Problema fondamentale per le polari coniche, geometricamente risoluto*, il *Programma* del Flauti, prima citato, la *Risposta* di Padula e altri scritti connessi.⁵³

....

⁵² Cfr. Napoli 1799. *I giornali giacobini*, a cura di M. Battaglini, Napoli, Borzi, 1988, pp. 151-152.

⁵³ Citiamo da un estratto in nostro possesso. Su "Vincenzo Flauti

Già nell'ultimo decennio del XVIII secolo si erano notati i segni di una diversità di impostazione scientifica nell'affrontare le questioni matematiche, per quanto tutto fluisse, anche se con qualche sbavatura, nell'alveo dell'ordinaria convivenza civile, senza laceranti deflagrazioni.

Le diversità, che si andavano sempre più nettamente delineando, tra i matematici napoletani schierati schematicamente sotto i segni di "sintetici" e "analitici", si estendevano a vari settori delle scienze matematiche. Per esempio, quando si vadano a leggere le menzionate *Prelezioni sui principj Matematici della Filosofia Naturale* di Fergola si vede per prima cosa che egli enuncia il "Principio del Minimo d'Azione" sotto la forma:

"Siavi un sistema di corpi, che scambievolmente attraggansi, o che tendano a centri fissi con forze proporzionali a funzioni delle distanze; sarà sempre un Massimo, o un Minimo la somma de' prodotti di ciascun corpo nell'integrale della sua velocità moltiplicata per l'elemento della curva, ch'ei ne sta descrivendo".

Ciò vale a dire, usando la medesima simbologia di Fergola, che $\delta S m \int v ds = 0$; ovvero $S m \int v ds$ è un massimo o un minimo (dove S è un simbolo che sta per sommatoria, m è la massa, v la velocità e ds l'elemento di traiettoria).

Scorrendo il testo, si constata poi che Fergola trova il modo di aggiungere in nota:

"E quindi ben si avvide il Sig. de' Mopertui [sic; ma

.....

e la sua sfida ai matematici napoletani" cfr. F.Amodeo, *Vita matematica napoletana*, cit., II, cap. VI.

intendasi Maupertuis], che il Principio del Minima Azione sia il più poderoso argomento, onde l'Ateo il più protervo n'è stramazato."⁵⁴

Questa affermazione di Fergola, fatta peraltro in un'opera che si distingue per la singolarità del suo valore scientifico, ci sembra una risposta a quanto Carlo Lauberg commentava, nella sua *Memoria*, a proposito dell'interpretazione del principio di minima azione data da Maupertuis. Scriveva Lauberg:

"Ma avendo trovato il citato Autore [Maupertuis], che ne' movimenti era un massimo, o un minimo la somma delle celerità moltiplicate per gli spazj, definì l'azione il prodotto dello spazio nella [intendasi: per] la velocità.

Quindi procedendo l'Illustre Segretario dell'Accademia di Berlino [Maupertuis] da puro Metafisico, credè aver ritrovata la più generale legge della Natura, che egli chiama la *legge delle cause finali*. Ne dedusse quindi infinite leggi cosmografiche, e fra le altre grandi verità, pretese dimostrare con tal principio l'esistenza dell'ESSERE SUPREMO [sic], avendo prima fatto vedere, che erano inconcludenti tutte le altre dimostrazioni Metafisiche, Fisiche, e Morali. Ma si potrebbe domandare al Signor Maupertuis cosa ha che fare coll'esistenza di Dio, o colle cause finali il prodotto della velocità per lo spazio, che è una proprietà del movimento dedotta da pochi semplici principj? La sola definizione delle cause finali è stata sempre inconcepibile dai migliori Metafisici."⁵⁵

....

⁵⁴ II, pp.195-196.

⁵⁵ Cfr. p.25.

Un sintomo importante che lascia intendere come anche le contrapposizioni tra matematici, dopo la caduta della Repubblica Partenopea del 1799 e le conseguenti stragi, divengano sempre più aspre e ideologicamente condizionate, si coglie da alcune puntualizzazioni con cui Felice Giannattasio e Vincenzo Flauti, curatori dei menzionati *Opuscoli matematici della scuola del Sig. r N. Fergola*, accompagnano alcuni degli articoli raccolti. Non soltanto essi ricordano, polemicamente, l'invio alla Società dei XL dello scritto di Giordano, con le parole:

"Il Signor Giordano, che non appartenevasi alla Società Italiana, come mai potè comunicarle cotest'Opuscolo, dagli atti della quale l'abbiamo estratto? Eccone di ciò il racconto. Alcuni letterati di nostra Nazione non deferendo a' giusti elogj, che il Signor Fergola faceva di questo suo Allievo, gliene dimandarono un attestato da' Dotti stranieri."

Ma poi, alla fine dell'Opuscolo VI (che insieme al IV e al V riguarda la trattazione di un unico argomento, prodotto da Fergola, dal titolo *Delle Funzioni Fratte, e del Risolvimento loro in Frazioni Parziali*, indispensabile per l'applicazione dell'operazione di integrazione alle funzioni razionali fratte), i medesimi curatori rivolgono agli avversari l'invito seguente:

"[...] Che se talun vi scorga cose men rette, o da doverle vie più chiarire, restringere, o ampliare; noi gli saprem grado, s'ei ce le dinoti accuratamente. Ma ciò facendo ei non trascorra i limiti della Filosofica Moderazione, che i Geometri Illustri han mai sempre inviolatamente custoditi, e che talun'ingegni Partenopei, del che ne meniamo acerbo duolo, a trasaltar son usi [...] Ed a queste letterarie produzioni, e non mica a' trascorsi

dell'insania, o del livore, ogni saggio protestasi di por mente".

In aggiunta a quanto prima riportato, vogliamo ricordare che da ricerche di archivio⁵⁶ sono venute fuori dure relazioni e controrelazioni, intorno all'assegnazione delle cattedre universitarie, che vedono coinvolto Vincenzo Flauti. Così si apprende che quando, nell'ottobre del 1806, il ministro André François Miot (1762-1841), membro del governo sotto il nuovo re Giuseppe Napoleone, varò la riforma dell'Università escluse il Flauti. Soltanto dopo alcuni mesi questi riprese ad insegnare Geometria analitica dei finiti e descrittiva. Successivamente, nel 1809, Fergola tentò di far assegnare al suo allievo Flauti la cattedra di Matematica sublime escludendo il più anziano Gennaro Minzele. Una relazione anonima, di quell'anno, trovata tra i documenti del Ministero dell'Interno (alle cui competenze faceva capo, questa volta, nell'ordinamento dei governi napoleonici, la pubblica istruzione nel Regno di Napoli), attacca, entrando nel merito e facendo leva sui nomi di Monge e Lacroix, il valore del manuale di Geometria descrittiva (il primo in lingua italiana) pubblicato da Flauti.⁵⁷ La controrelazione di Fergola è

....

⁵⁶ Riportate in G.Ferraro-F.Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange*, cit., si vedano in particolare i documenti 5 e 6, pp. 218-228.

⁵⁷ V.Flauti, *Elementi di Geometria descrittiva*, Roma, de' torchi di Luigi Perego Salvioni, 1807. Sul libro Flauti ebbe a far notare: "Quest'opera fu composta fin dal 1801 per servire la Scuola di Genio e Artiglieria, era il primo libro, che in tal nuovo ramo di scienza geometrica [...] si pubblicava in Italia."

altrettanto puntuale nel far emergere la capacità e i contributi originali espressi da Flauti in questa e in altre sue fatiche. Il contenuto di tali documenti d'archivio ha chiari legami con le *Lettere sulla Geometria descrittiva*, che abbiamo constatato essere state allegate in appendice a copie della citata *Geometria descrittiva*.⁵⁸

Non sempre però i diversi punti di vista scientifici nascondevano esclusivamente "interessi particolari di un uomo o di un partito", molto spesso si trattava di scelte genuinamente scientifiche, per quanto non incanalate verso posizioni rivelatesi poi di pieno successo. Vi è da considerare, a questo proposito, una fondamentale questione riguardante Fergola a cui vogliamo accennare.

Nella visione che questi aveva della matematica vi era presente una netta distinzione e, forse, una sostanziale irriducibilità tra il "Calcolo simbolico" (cioè il calcolo infinitesimale secondo la linea di sviluppo dominata dal formalismo algebrico di Eulero e Lagrange) e la Geometria. Analizzando i manoscritti di Fergola si capisce che egli aveva

....

(Cfr. *Prospetto di mezzo secolo di servizi scientifici resi dal Cav.V. Flauti fino al 1849*).

⁵⁸ Per esempio, esse si possono trovare allegate alla copia reperibile presso la Biblioteca Nazionale di Napoli, alla collocazione: Biblioteca Provinciale-II-1506. Le *Lettere* sono state ripubblicate recentemente da A.Fiocca in *La geometria descrittiva in Italia (1798-1838)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XII (1992), 2, pp.187-249.

l'obiettivo primario di raggiungere la purezza e completezza sia del "Calcolo simbolico" che della Geometria salvaguardando le loro rispettive specificità e interne coerenze. Tutto ciò condusse Fergola e poi un certo numero di suoi allievi, come Giannattasio, Flauti, Giuseppe Scorza (1781-1843), a studiare e potenziare la geometria sintetica (operazione rivelatasi comunque non infruttuosa per la fondazione e lo sviluppo delle geometrie descrittiva e proiettiva) e quella cartesiana, nutrendo essi scarsa fiducia verso i metodi della geometria lagrangiana, cioè verso i metodi della geometria a due o a tre coordinate⁵⁹ la quale

....

⁵⁹ Opportunamente G.Loria (in *Nicola Fergola*, cit., p.19) precisa: "Al principio di questo secolo tre erano i sistemi tenuti dagli espositori della teoria delle curve, e in particolare della teoria delle coniche: vi era chi camminava sulle tracce di Apollonio Pergeo, procedendo per via geometrica; altri - seguendo la via delineata da Lagrange, sviluppata da Monge e tanto vantata da Gergonne - determinavano con procedimento puramente algebrico le proprietà delle figure geometriche [...] [col] porre in equazione qualunque problema senza bisogno di eseguire costruzioni preliminari ausiliarie [...] (tale procedimento veniva considerato come caratteristico della *Geometria analitica* propriamente detta [o *geometria a due o tre coordinate*, n.d.r.]); altri infine preferiva delle considerazioni geometriche intercalate con piccoli calcoli fondati sull'uso di speciali sistemi di coordinate cartesiane suggeriti dalla questione studiata, affrettandosi però a tradurre i risultati dei calcoli eseguiti in teoremi o in costruzioni [...]. In questo terzo modo

ancora oggi è parte della moderna geometria analitica.

Su quest'ultima questione (peraltro insistentemente discussa in tutta Europa), riguardante l'alternativa tra metodo sintetico e metodo lagrangiano in geometria, e sulla necessità di organizzare, per motivi dottrinali e didattici, il Calcolo infinitesimale di Eulero e Lagrange secondo il metodo sintetico, si concretizza la forte diversità di vedute che porta alla divisione tra i matematici napoletani. Diversità che già durante il periodo dei regni napoleonici diviene opposizione con Ottavio Colecchi e Ferdinando De Luca, connotandosi di forte valenza ideologica,⁶⁰ e che attraversa gli stessi membri della scuola di

....

di procedere [...] si faceva risiedere l'essenza della *geometria cartesiana*".

⁶⁰Le seguenti considerazioni, poste da De Luca all'inizio del capitolo ("capo") I del suo libro di geometria analitica (dal titolo *Analisi a due coordinate*, del 1813), contribuiscono a dare un'idea degli aspetti ideologici delle diverse posizioni assunte dai "sintetici" e dagli "analitici". Scrive De Luca: "Si fa in Ideologia differenza tra metodo sintetico, ed analitico. Il primo, come ognuno sa, è un metodo di composizione, e l'altro chiamasi metodo di risoluzione. Io qui non discuterò quale de' due metodi sia da preferirsi nell'insegnamento: abbastanza questa questione è stata agitata, e noi ne rimettiamo i curiosi alla logica di Hobbes, alle opere di Condillac, all'ideologia di Tracy [leggasi: agli *Éléments d'idéologie* di Destutt de Tracy, n.d.r.], ed all'erudite, e dotte memorie lette all'oggetto nel nostro consiglio d'istruzione da varj Professori: solo dirò che i

Fergola, come è dato dall'esempio di Francesco Paolo Tucci (1790-1875) passato a prediligere ricerche di tipo analitico.

L'esponente di punta dell'opposizione in Napoli ai matematici cosiddetti "sintetici" è un domenicano, il già citato Ottavio Colecchi, del comune autonomo (*universitas sui domini*) di Pescocostanzo, nella provincia abruzzese, proveniente dal convento di Francavilla a Mare, ridotto allo stato di prete secolare a seguito della soppressione degli ordini religiosi avvenuta con decreto del regio governo napoleonico emesso il 7 agosto 1809. Colecchi giunse a Napoli nel 1810, a 37 anni, e si fece conoscere per la sua vasta erudizione nelle scienze matematiche, a dimostrazione che anche nella provincia del regno napoletano, come si è accennato, esistevano poli, relativamente autonomi (si pensi, ad esempio, ai licei di Salerno, di Catanzaro, di Bari, di L'Aquila e al liceo del Salvatore, che funzionavano come piccole università, capaci, i primi quattro, di conferire anche i gradi accademici⁶¹) in cui le scienze

....

matematici hanno con preferenza adottati questi vocaboli per caratterizzare le loro opere, e che talvolta alcuni hanno abusato [...] quando si assumo delle verità generali come principj; quando le definizioni, e gli assiomi si fanno precedere ad ogni del nostro spirito, ci vuol altro che adottare tutte le x , ed y della biblioteca de' Tolomei, per voler dare ad una produzione il tuono di produzione analitica. Sono due cose ben distinte l'un dall'altra, usare il metodo analitico, ed adottare i simboli algebrici".

⁶¹ In G.Ferraro-F.Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e*

matematiche si discutevano e si insegnavano a un buon livello.

Colecchi fu anche un buon filosofo, diffusore di Kant in Italia, che contribuì a far compiere alla filosofia italiana dell'Ottocento decisi passi avanti verso la conquista di una sfera autonoma.⁶²

Lo scontro intorno alle questioni prima accennate venne ufficialmente aperto da un articolo di Colecchi apparso nel 1810 sulla «Biblioteca analitica di Scienze, Letteratura e

....

Lagrange, cit., p.145, è fatta menzione del rapporto dal titolo "Quadro economico di tutti gli stabilimenti di pubblica istruzione" in cui, tra l'altro, è scritto: "Il Liceo del Salvatore è tenuto con tale proprietà che può servire di modello [...] Vi sono quattro Licei nelle provincie, cioè in Salerno, in Aquila, in Bari, ed in Catanzaro. Questi sono considerati come piccole Università dandovisi il completo insegnamento in tutte le facoltà e potendovisi ancora eseguire gli esami pe' gradi dottorali. [...] I Collegi di Maddaloni, di Lucera, di Lecce, di Cosenza, di Avigliano, di Reggio sono tutti in buono stato. [...] Esiste un Collegio in Monteleone [...] Il Collegio di Campobasso va ad aprirsi in Novembre". Questi dati, per quanto riferiti in un rapporto del 1817, riflettono la situazione esistente, in sostanza, già negli anni precedenti.

⁶² Su tale aspetto rinviamo alla particolare competenza di Guido Oldrini e al suo recente volume *L'Ottocento filosofico napoletano nella letteratura dell'ultimo decennio*, Napoli, Bibliopolis, 1986, "Memorie dell'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici", pp.80-81.

Belle-Arti»,⁶⁹ dal titolo, *Riflessioni sopra alcuni opuscoli, che trattano delle funzioni fratte, e del loro risolvimento in funzioni parziali*. Questo articolo è scritto in contrapposizione al saggio di Nicolò Fergola *Delle funzioni fratte, e del loro risolvimento in frazioni parziali* (estratto da un manoscritto di *Analisi sublime* dello stesso autore e pubblicato nei citati *Opuscoli matematici della scuola del Sig.r N. Fergola*) ed è rivolto "agl'intendenti delle cose matematiche". Esso attacca con violenza il "didascalico rigore" fergoliano, il persistere sulle questioni di geometria degli antichi, la mancata adozione di "migliori istituzioni, come sarebbero quelle d'un Paoli, d'un Lacroix, d'un Francoeur".

Purtroppo, non si può far a meno di constatare, anche in questo caso, che per quanto i contendenti parlassero un linguaggio strettamente tecnico scientifico, "per gli intendenti di cose matematiche", era evidente che la ragione degli strali che reciprocamente si lanciavano risentiva anche delle vicende politiche e istituzionali.

Il ventennio dei regni napoleonidi, specialmente quello di Gioacchino Murat (re col nome di Giacchino Napoleone), fu comunque fecondo per gli studiosi e per le istituzioni scientifiche napoletane. Maturarono molte iniziative, tra cui segnaliamo:

-Il risorgere dell'Accademia, trasformatasi nella Società Reale di Napoli, e la riforma dell'Università degli Studi che comportò, tra le altre cose, l'abolizione della figura del

....

⁶⁹ Tomo quarto, pp.249-269 e 329-376.

professore sostituto del titolare e il divieto di designare professori *interini*, cioè nominati senza concorso. Tutto ciò fu favorito da André François Miot, Ministro dell'Interno (al cui ministero, con l'avvento dei francesi, facevano capo gli affari concernenti le accademie, l'università e, in generale gli studi).

-La fondazione della Scuola di Applicazione di Ponti e Strade (4 marzo 1811), sotto la direzione del generale Jacques David Martin de Campredon (1761-1837), che fu pure comandante del Genio dell'Armata napoleonica d'Italia e Ministro della Guerra del Regno di Napoli. La Scuola fu la prima ad essere fondata in Italia ed ebbe vita solida e duratura.

-La riapertura dell'Accademia militare, già efficacemente riformata dal Borbone nel 1787, come si è detto.

Oltre a ciò, furono imposti registri di presenza e assenza per i professori e gli allievi; si svilupparono i laboratori scientifici e medici; fu favorita la edizione di trattati nazionali da usarsi all'università e all'accademia militare: presso questa istituzione venne effettuata la notevole iniziativa editoriale consistente nella pubblicazione dei citati dodici volumi del *Saggio di un Corso di Matematiche per uso della Reale Scuola Politecnica e Militare*. Si valorizzarono anche le competenze personali, indipendentemente dagli orientamenti culturali e politici, sotto la guida di Matteo Angelo Galdi (1765-1821), direttore generale dell'Istruzione pubblica.

Forse è vero che, nell'arco di tempo considerato, a Napoli come in tutta Italia mancava un uomo superiore (non considerando Lagrange che ben presto apparterrà all'intera Europa e morirà francese) salvo che nella musica, secondo un'affermazione di

allora,⁶⁴ ma è anche vero che vi era una vasta distribuzione di valenti matematici che avranno cura di tenere ben stretto il testimone della scienza contribuendo in tal modo a mettere in grado le generazioni maturate intorno all'unità d'Italia e poi nella seconda metà dell'Ottocento di portare la matematica italiana ai primi posti nel mondo.

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi "Federico II" di Napoli.

²Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università degli Studi di Salerno.

²Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università degli Studi di Salerno.

.....

⁶⁴ Cfr. *Opere matematiche di Paolo Ruffini*, tomo terzo, sotto gli auspici dell'Unione Matematica Italiana e a cura di Et. Bortolotti, Roma, Cremonese, 1954, p.52.

GLOBAL EXISTENCE AND UNIQUENESS TO A NONLINEAR EVOLUTION
PROBLEM IN THE DIFFUSION OF THE PARTICLES OF A MIXTURE IN
PRESENCE OF CREATION EVENTS

Nota di Gabriele Guerriero

Presentata dal Socio Salvatore Rionero

Adunanza del 3/6/95

Riassunto. Si considera il problema della diffusione di un miscuglio di particelle in presenza di effetti di creazione. Nell'ambito della teoria del trasporto si dimostra un teorema di esistenza globale (nel tempo) e di unicità.

Abstract. The diffusion of a mixture particles in presence of creation events is considered in the framework of the transport theory. A global existence and uniqueness theorem in the natural space $L^1(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^+$ is obtained.

1. Introduction.

In the past as nowadays, the diffusion of the particles of a mixture has attracted the attention of many researchers working in various fields of physics and engineering. For describing this phenomenon, the natural model appears to be the Boltzmann equation. Recently, considerable attention has been given to this equation in the frame of the so-called scattering kernel for the collisional term. Precisely, let us consider the diffusion of certain test particles (t.p.) of mass m in an infinite homogeneous medium consisting of certain other field particles (f.p.) having mass M and whose total density N is a constant fixed once for all. It is assumed that in the interior of this host medium a spatially uniform pulsed source emits at time $t=0$ a burst of t.p. with an intensity of Q t.p. per unit volume and a velocity distribution $S(\mathbf{v})$, the shape function $S(\mathbf{v})$ being nonnegative and normalized to unity. The host medium is supposed to be free of t.p. up to

$t=0$. The t.p. so injected diffuse then in the given background of f.p. by binary collisions against the f.p. as well as between themselves, the general collision resulting in either scattering or removal or creation events. It is assumed that:

- i) the system is subject to the action of an external conservative force;
- ii) the cross sections, relevant to all collisions considered are of the $1/v$ -type.

Then, denoting by $f(v,t)$ the distribution function of the t.p. the problem of determining the behavior of $f(v,t)$ for $t \in [0, \infty)$ under the initial condition $f(v,0) = QS(v)$, arises. We recall that:

- iii) in the limit of no background of f.p. (i.e. when the t.p. interact only through scattering collisions), and without creations events, the afore said problem has been studied in [4-5,9-10,13-15]. Precisely in [4-5,13] the global existence and uniqueness of $f(v,t)$ has been proved in the natural space $L^1(\mathbb{R}^3) \times [0, \infty)$, while in [9-10,14-15] the stability of $f(v,t)$ has been studied in $L^p(\mathbb{R}^3) \times [0, \infty)$ with $p=1,2$;
- iv) in the presence of background of f.p., but without creations events, the problem has been considered in [1,11]. Precisely in [1] the local existence and uniqueness has been studied, while in [11] the global existence is developed.

The aim of the present paper is to extend the results obtained in [11], in presence of creation events, and assuming that the creation cross-section is also of $1/v$ -type. We notice that, denoting by $n(t)$ the density of the t.p., in absence of creation events, but in presence of removal, one has $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = 0$. Of course in presence of creation events $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t)$ can be different from zero and one has to control the asymptotic behavior of $n(t)$.

The paper is organized as follows. Sect.2 is dedicated to the notations and statements of the problem, while in Sect.3 the integral formulation of the problem is

presented. In Sect.4 a (global) theory of existence and uniqueness is developed.

2. Notations and statements of the problem.

For the physical situation sketched in the introduction the nonlinear integrodifferential Boltzmann equation, governing the distribution function $f(\mathbf{v}, t)$ of the t.p., read as [2, 6-7, 12, 17-18]:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + (\mathbf{F}(t)/m) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f(\mathbf{v}, t) = -[\hat{N}\hat{C} + C_n(t)] f(\mathbf{v}, t) + \\ & + \hat{N}\hat{C}_s \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' + \nu \hat{N}\hat{C}_c \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_c(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' + \\ & + C_s \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \pi_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v}) f(\mathbf{v}', t) f(\mathbf{v}'', t) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'' \end{aligned} \quad (1)$$

and is to be integrated upon the initial condition

$$f(\mathbf{v}, 0) = Q_S(\mathbf{v}). \quad (2)$$

Let us specify that

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3)$$

denotes the unknown total density of the t.p. considered, while

$$\hat{C} = \hat{C}_s + \hat{C}_r + \hat{C}_c, \quad C = C_s + C_r \quad (4)$$

denote respectively the total microscopic frequencies (the subscripts s, c, r referring to scattering creation and removal events, respectively) for the relevant cross section, of the t.p.-f.p. and t.p. t.p. collisions. All the constants \hat{C}_i, C_n ($i=s, r, c$ $n=s, r$) are real and nonnegative. The scattering probability distributions $\hat{\pi}_s(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ and $\pi_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v})$ are a nonnegative functions obeying the

normalization conditions:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \pi_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1. \quad (5)$$

Further π_s is symmetric with respect to the velocities \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' before the collisions, that is

$$\pi_s(\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v}) = \pi_s(\mathbf{v}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}). \quad (6)$$

Finally, ν is the mean number of t.p. produced by creation, and $\hat{\pi}_c(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ is the kernel related to the creation by collisions of the t.p.-f.p., obeying the normalization condition:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_c(\mathbf{v}', \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1. \quad (7)$$

Equation (1) is different, formally, from the usual kinetic formulation of the nonlinear Boltzmann equation generally adopted [6,7]. But in the case of Maxwellian particles with a cut-off and for deterministic model based on momentum and energy conservation laws, the homogeneous usual Boltzmann equation is equivalent to equation (1) for a suitable specification of the scattering probability distributions [3,8,16]. In addition, the removal and creation effect which are usually disregarded, are written out explicitly here.

3. The integral formulation of the problem.

Let us integrate equation (1) along the trajectory of a t.p. between the initial time and the reference time. Setting

$$K(t, \tau) = \exp \left\{ - \int_{\tau}^t [N\dot{C} + Cn(u)] du \right\} \quad (8)$$

and taking into account eq.(1), we can then recast eq.(1) in the integral form

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{v}, t) = & QS[\mathbf{v}(0)]K(t, 0) + \int_0^t d\tau K(t, \tau) \left\{ N\hat{C}_s \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_s[\mathbf{v}', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) d\mathbf{v}' + \right. \\
 & + C_s \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \pi_s[\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) f(\mathbf{v}'', \tau) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'' + \\
 & \left. + \nu N\hat{C}_c \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_c[\mathbf{v}', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) d\mathbf{v}' \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

where

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v} - \int_{\tau}^t [\mathbf{F}(\xi)/m] d\xi \quad (10)$$

follows from integrating the Newton law of motion upon the final condition $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}$. We observe that eq.(9) is made fully explicit once we know $n(t)$. An equation for $n(t)$ is, indeed, obtained by just integrating both sides of equation (1) itself over the domain of the velocity. We get in fact for $n(t)$ the following nonlinear first order differential equation of Riccati type

$$\frac{dn(t)}{dt} + Nn(t) [\hat{C}_r + (1-\nu)\hat{C}_c] + C_r n^2(t) = 0, \quad (11)$$

which is the continuity equation for $n(t)$. The general solution to eq.(11) satisfying the initial condition $n(0) = Q$ is

$$n(t) = QNE / [(NE + QC_r) \exp(NEt) - QC_r] \quad (12)$$

where

$$E = \hat{C}_r + (1-\nu)\hat{C}_c. \quad (13)$$

If $\hat{C}_r = C_r = \hat{C}_c = 0$, then we have simply $n(t) = Q$ and represents the t.p. conservation. Since $n(t)$ is known, substituting in equation (8) the expression (12), we obtain the following explicit expression for $K(t, \tau)$

$$K(t, \tau) = H(t) / H(\tau) \quad (14)$$

where

$$H(t) = \exp(-N\hat{C}t) [NE + QC_r - QC_r \exp(-NEt)]^{-C/C_r}. \quad (15)$$

Equation (9) is now recasts in operational form as

$$f = Af \quad (16)$$

where the inhomogeneous nonlinear integral operator A is defined according to

$$Af(\mathbf{v}, t) = QS[\mathbf{v}(0) \exp(-N\hat{C}t) \{ [NE + QC_r(1 - \exp(-NEt))] / NE \}^{-C/C_r} +$$

$$+ \int_0^t d\tau [H(t) / H(\tau)] \left\{ N\hat{C}_s \int \hat{\pi}_s[\mathbf{v}', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) d\mathbf{v}' +$$

$$+ \nu N\hat{C}_c \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\pi}_c[\mathbf{v}', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) +$$

$$+ C_s \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \pi_s[\mathbf{v}', \mathbf{v}'', \mathbf{v}(\tau)] f(\mathbf{v}', \tau) f(\mathbf{v}'', \tau) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'' \right\}. \quad (17)$$

4. Global existence and uniqueness.

Let T be a real positive constant, and denote by E the Banach functional space of the functions $\varphi(\mathbf{v}, t)$, defined on $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ which are continuous in t for almost every $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, and summable in \mathbf{v} for any $t \in [0, T]$:

$$E = \left\{ \varphi(\mathbf{v}, t) : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(\mathbf{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3), \varphi(\cdot, t) \in C[0, T] \right\} \quad (18)$$

Denoting by

$$\|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_t = \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(\mathbf{v}, t)| d\mathbf{v} \quad (19)$$

the L_1 -norm with respect to \mathbf{v} , the norm in E is defined by

$$\|\varphi(\mathbf{v}, t)\| = \max_{[0, T]} \|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_t. \quad (20)$$

Furthermore, we denote by B_r the closed set of E

$$B_r = \left\{ \varphi(\mathbf{v}, t) \in E : \|\varphi(\mathbf{v}, t)\| \leq r, \|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_w \leq r, r \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (21)$$

where $\|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_w$ is the weighted norm

$$\|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_w = \|\varphi(\mathbf{v}, t) \exp(-\lambda t)\|, \quad \lambda > 0 \quad (22)$$

and is equivalent to the norm (19) because of

$$\exp(-\lambda T) \|\varphi(\mathbf{v}, t)\| \leq \|\varphi(\mathbf{v}, t)\|_w \leq \|\varphi(\mathbf{v}, t)\|. \quad (23)$$

The global existence and uniqueness of the solution to equation (16) are now proved through an application of the contracting mapping principle.

Theorem 1. *Assume that*

$$\beta = \sup_{t \in [0, \infty)} \left[QK(t, 0) + [(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) Nr + C_s r^2] \int_0^t K(t, u) du \right] \leq r. \quad (24)$$

Then, for any positive finite T , in the space E equipped with the norm (22), the operator A is a contractive mapping on B_r such that $AB_r \subseteq B_r$. Hence the global existence and uniqueness of solution to equation (16) follows.

Proof. It is easy to check that the operator A maps B_r into itself, namely $AB_r \subseteq B_r$. We have in fact for $\varphi \in B_r$

$$\|A\varphi\|_t \leq QK(t, 0) + \int_0^t du K(t, u) [N(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) \|\varphi\|_u + C_s \|\varphi\|_u^2]. \quad (25)$$

Eq. (25) is obtained by taking the modulus of eq.(16) and integrating over $v \in \mathbb{R}^3$ in force of the normalization of $S, \hat{\pi}_s, \pi_s$ and $\hat{\pi}_c$. Hence we obtain

$$\| \|A\varphi\|_w \leq \|A\varphi\| \leq \beta \quad (26)$$

Taking into account (24), it easily turns out

$$\| \|A\varphi\|_w \leq r \quad \text{for} \quad \varphi \in B_r. \quad (27)$$

We shall show now that A is a contractive operator on B_r . By accounting for the symmetry of $\pi_s(v', v'', v)$ with respect to the velocities before collisions, for $\varphi, \psi \in B_r$, it follows

$$\begin{aligned} |A\varphi - A\psi| \leq & \int_0^t du K(t, u) \left\{ N \hat{C}_s \int_{\mathbb{R}^3} dv' [\hat{\pi}_s(v', v(u))] |\varphi(v', u) - \psi(v'', u)| + \right. \\ & + N \hat{C}_c \nu \int_{\mathbb{R}^3} dv' \hat{\pi}_c[v', v(u)] |\varphi(v', u) - \psi(v'', u)| + \\ & + C_s \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \pi_s[v', v'', v(u)] |\varphi(v', u) + \psi(v', u)| \times \\ & \left. |\varphi(v', u) - \psi(v'', u)| dv' dv'' \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

and hence

$$\|A\varphi - A\psi\|_t \exp(-\lambda t) \leq \exp(-\lambda t) \int_0^t du K(t, u) \exp(\lambda u) \| \varphi - \psi \|_u \times$$

$$[N(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) + 2C_s r]. \quad (29)$$

Finally we obtain

$$\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{A}\psi\|_w \leq [2C_s r + N(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c)] / (\hat{C}N + \lambda) \|\varphi - \psi\|_w, \quad (30)$$

and choosing

$$\lambda > [2C_s r + N(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c - \hat{C})] \quad (31)$$

the theorem is completely acquired by means of the Caccioppoli-Banach point fix theorem.

Theorem 2. $\exists!$

$$C_s \leq [(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C} - 1]^2 \hat{N} \hat{C} / 4Q, \quad (32)$$

then $\exists r \in \mathbb{R}^+$ such that (24) is verified.

Proof. Setting

$$R_1 = \hat{N} \hat{C} / 2C_s \{1 - (\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C} - [(1 - (\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C})^2 - 4QC_s / \hat{N} \hat{C}]^{1/2}\} \quad (33)$$

$$R_2 = \hat{N} \hat{C} / 2C_s \{1 - (\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C} + [(1 - (\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C})^2 - 4QC_s / \hat{N} \hat{C}]^{1/2}\} \quad (34)$$

by (32), easily it turns out that $r \in [R_1, R_2]$ implies

$$\beta \leq Q + r(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c) / \hat{C} + r^2 C_s / \hat{N} \hat{C} \leq r. \quad (35)$$

We recall that in the hypothesis of theorem A and B if $\varphi_0(\mathbf{v}, t) \in B_r$, then the sequence of iterated solutions $\varphi_n = \mathbf{A}\varphi_{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$ converges in the norm (22) to the unique solution of equation (16) and the following a priori estimate for the approximate solutions hold

$$\|\varphi - \varphi_n\|_w \leq \frac{q^n}{1-q} \|\varphi_0 - \mathbf{A}\varphi_0\|_w \quad (36)$$

$$q = [2C_s r + N(\hat{C}_s + \nu \hat{C}_c)] / (\hat{C}N + \lambda). \quad (37)$$

Acknowledgments.

This research has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of the Italian C.N.R. and has been partially supported by the M.U.R.S.T. under 40% and 60% contracts.

REFERENCES

- [1] Boffi V.C., Magnavacca A., Spiga G., Nonlinear evolution problems in the diffusion of the particles of a mixture, *Int. J. Engng. Sci.* Vol 23 No.3 pp.345-345, (1985).
- [2] Boffi V.C., Molinari V.G., Time-dependent distortion of the distribution function via an operational formulation of the Boltzmann equation, *Il Nuovo Cimento*, Vol.58 B, N.2 pp.215-235, (1981).
- [3] Boffi V.C., Protopopescu V., Spiga G., On the equivalence between the probabilistic, kinetic, and scattering kernel formulations of the Boltzmann equation, *Physica A* 164 pp.400-410, (1990).
- [4] Boffi V.C., Spiga G., Rigorous iterated solutions to a nonlinear integral evolution problem in particle transport theory, *J. Math. Phys.*, 23, pp.1859-1864, (1982).
- [5] Boffi V.C., Spiga G., Global solution to a nonlinear integral evolution problem in particle transport theory, *J. Math. Phys.*, 23, pp.2299-2303, (1982).
- [6] Cercignani C., *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [7] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M., *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer-Verlag, New York (1994).
- [8] Cercignani C., Lampis M., Sgarra C., On the relation between the scattering kernel and the standard formulation of the Boltzmann equation, *Il Nuovo Cimento*, Vol.101 B, N.5 pp.523-531, (1989).
- [9] Guerriero G., On the existence and stability of a steady solution to a nonlinear integral equation of the

particle transport theory, Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Serie IV Vol LVI pp.163-173, (1989).

[10] Guerriero G., Perturbative Method for a nonlinear integral equation of the particle transport theory, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences-Vol.4, Proceedings of the Vth International Meeting 'Waves and Stability in Continuous Media' Word Scientific pp.162-167, (1991).

[11] Guerriero G., Global Solutions and L^1 -Stability to a nonlinear evolution problem in the diffusion of the particles of a mixture, Int.J.Engng.Sci Vol. 29, No.9, pp.1077-1083, (1991).

[12] Kogan M.N., Rarefied Gas Dynamics, Plenum Press, New York, (1969).

[13] Rionero S., Global solutions to a nonlinear integral evolution problem in particle transport theory, Atti Accademia Scienze Torino, Suppl. Vol. 120 p.199-209, (1986).

[14] Rionero S., Guerriero G., On the stability of the solutions to a nonlinear integral evolution problem arising in particle transport theory, Meccanica 22, pp.59-64, (1987).

[15] Rionero S., Guerriero G., L^1 -stability of the solutions to an integral evolution equation of the nonlinear particle transport theory, Meccanica 24, pp.191-199, (1989).

[16] Spiga G., Nonnenmacher T., Boffi V.C., Moment equations for the diffusion of the particles of a mixture via the scattering kernel formulation of the nonlinear Boltzmann equation, Physica 131A, pp.431-448, (1985).

[17] Waldmann L., Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck, Handbuch der Physik, Vol.12, Ed. S. Flugge Springer Berlin (1958).

[18] Williams M.M.R., Mathematical Methods in Particle Transport Theory, Butterworths, London (1971).

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e
Matematica Applicata dell'Universita di Palermo
Via Ponte Don Melillo, 84049-Fisciano-Palermo*

**THE POSSIBLE IMPLICATION OF INTERLEUKINE-1 AND INTERLEUKINE-6
IN THE COORDINATION OF THE SPERMATOGENIC PROCESS IN
MAMMALS.***

Nota di Bernard Jégou - GERM, U435 - Rennes, France.
Presentata dal socio Giovanni Chieffi

*Conferenza del 27 settembre 1995

Interleukine-1 (IL-1) and interleukine-6 (IL-6) are produced by Sertoli cells. As IL-1 stimulates IL-6 production in some tissue, the cascade of events that results in IL-6 secretion by Sertoli cells was studied. The addition of IL-1 α to Sertoli cells resulted in a time-dependent increase in IL-6 secretion. Incubation of Sertoli cells with two known stimulators of IL-1 production, lipopolysaccharide (LPS) and residual bodies, resulted in a significant increase into the medium several hours before IL-6 release. That IL-1 is essential for IL-6 production from Sertoli cells was established by blocking the actions of LPS and residual bodies with an anti-IL-1 α antibody. An increase in the release of IL-1 before IL-6 was also observed in medium obtained from staged segments of intact seminiferous tubules; IL-1 reached a maximum level at stage VIII, when mature spermatozoa are released and residual bodies are formed and phagocytosed. The secretion of IL-6 was low during this stage and then increased progressively from stage IX onward, consistent with IL-1 stimulation of IL-6. The pathway of IL-1 α -induced IL-6 was studied in the presence of agents that influence arachidonic acid release and metabolism. IL-1 α was found to stimulate arachidonic acid release by Sertoli cells. Furthermore, a phospholipase A₂ inhibitor aristolochic acid, significantly decreased IL-1-, LPS- and pyricularia pubera thionin-induced IL-6 secretion from Sertoli cells. Indomethacin, a specific inhibitor of the cyclooxygenase pathway, had no significant effect on basal, but enhanced IL-1- and LPS-stimulated IL-6 production. The involvement of arachidonic acid metabolites produced in the lipoxygenase pathway on the release of IL-6 was investigated indirectly, using nordihydroguaiaretic acid. This inhibitor reduced basal and IL-1 α - and LPS-stimulated IL-6 production. Ethacrynic acid, an inhibitor of peptidoleukotriene synthesis, also reduced basal IL-6 levels and blocked IL-1 α - as well as LPS-induced IL-6 secretion. It is concluded that IL-1 produced by Sertoli cells in response to LPS or residual bodies induces IL-6 through the lipoxygenase pathway.



THE ANTI-VIRAL DEFENSE SYSTEM WITHIN THE MAMMALIAN TESTIS.*

Nota di Bernard Jégou, GERM, U435 - Rennes, France.
Presentata dal socio Giovanni Chieffi

*Conferenza del 2 ottobre 1995

Interferons (IFNs) α , β and γ are wellknown for their anti-viral, anti-proliferative and immunoregulatory activities. Although several studies suggest an involvement of IFNs in the spermatogenic process, nothing is known about the possible production of these molecules within the testis. Moreover, the antiviral capabilities of testicular cells have not been explored yet, despite their importance in the context of sexually transmissible diseases. Using RT-PCR, a cytopathic inhibition micromethod assay and an ELISA, the present study demonstrates for the first time that interferons α and γ are produced by testicular cells. IFN α protein and corresponding mRNA are expressed by peritubular cells and germ cells. In vitro, IFN α production by Sertoli cells, peritubular cells and early spermatids was inducible by the Sendaj virus, whereas pachytene spermatocyte IFN α production was not triggered by this virus. Of all the testicular cell types tested, Sertoli cells were far the ones which produced the highest concentrations of IFN α/β , followed by peritubular cells. Both IFN γ mRNA and IFN γ protein were found in early spermatids but, in contrast, were not produced by peritubular cells, Sertoli cells or pachytene spermatocytes. In conclusion, our study establishes the cellular distribution of IFNs within the seminiferous tubules and provides the basis for research into the possible involvement of IFNs in the spermatogenic process regulation. To the best of our knowledge, our results afford the first insight on how the testicular anti-viral defence system is organized.

.....

THE DISTANCE TO L^∞ FROM THE MORREY SPACE $L^{p,\lambda}$

NOTA DI CLAUDIA CAPONE e MARIA ROSARIA FORMICA

PRESENTATA DAL SOCIO CARLO SBORDONE

ADUNANZA DELL' 11/11/1995

Riassunto. Le funzioni limitate in generale non sono dense negli spazi $L^{p,\lambda}(\Omega)$ di Morrey. In questa nota diamo una formula per la distanza da $L^\infty(\Omega)$ in $L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Abstract. Bounded functions in general are not dense in the Morrey spaces $L^{p,\lambda}(\Omega)$. In this paper we establish a formula for the distance to $L^\infty(\Omega)$ from $L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Key words and phrases: Function Spaces. Imbeddings.

The first Author was supported by M.U.R.S.T. (40%).

The second Author was supported by C.N.R., at the Istituto per Applicazioni della Matematica.

1. Introduction.

Let Ω be a bounded open set in \mathbf{R}^n , and assume that there exists $A > 0$ such that

$$(1.1) \quad |\Omega(x, r)| \equiv |\{y \in \Omega : |x - y| < r\}| \geq Ar^n$$

for $0 < r < \text{diam}(\Omega)$.

For $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p \leq \infty$ we set

$$(1.2) \quad \|f\|_{p,\lambda} = \sup_{0 < r < \text{diam}(\Omega)} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega(x,r)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

The subspace of L^p functions such that the norm is finite is referred as the Morrey space $L^{p,\lambda}(\Omega)$. In a recent paper F. Chiarenza and M. Franciosi, [CF], introduced the subspace $VL^{p,\lambda}(\Omega)$ of functions $f \in L^{p,\lambda}$ such that

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 < \rho < r} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

And they proved that

$$(1.4) \quad VL^{p,\lambda} = \overline{L^\infty}^{L^{p,\lambda}}$$

In this paper we will improve their result by establishing the formula

$$(1.5) \quad \text{dist}_{L^{p,\lambda}}(f, L^\infty) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 < \rho < r} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

As an application of this formula, let us introduce as in [Tru] the Morrey-Sobolev space $W_{1,n-1}^1$ of strongly differentiable functions with derivatives in the Morrey space $L^{1,n-1}$.

In that paper Trudinger proved that this space is imbedded in the Orlicz space EXP of exponentially integrable functions, but not in the closure exp of L^∞ with respect to the EXP norm.

Namely, he shows that the function $u(x) = \log \frac{1}{|x|}$ belongs to $W_{1,n-1}^1$ and clearly we do not have

$$\int_{\Omega} e^{\beta|u|} dx < \infty \quad \forall \beta > 0$$

where \int_{Ω} stands for $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega}$

Actually using our result we can deduce that if $|Du|$ verifies

$$(1.6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 < \rho < r} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

then $u \in \text{exp}$, i.e. for any $\beta > 0$:

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} e^{\beta u} dx < \infty$$

In section 2 we introduce the Orlicz spaces EXP, LlogL, the Marcinkiewicz space $L^{q,\infty}$ and the Morrey space $L^{p,\lambda}$, ($0 < \lambda < n$) on a bounded open set Ω in \mathbb{R}^n .

In section 3 we prove formula (1.5).

In section 4 we consider some applications.

2. Some function spaces

Let $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ and f a measurable function on the bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. If $f \in L^p(\Omega)$ and the set described by the numbers

$$(2.1) \quad \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f|^p dy$$

$(B_\rho(x) = \{y : |x - y| < \rho\})$ is bounded as $0 < \rho < \text{diam}(\Omega)$, and for $x \in \Omega$, we say that f belongs to the Morrey space $L^{p,\lambda}(\Omega)$.

For $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ we define the norm

$$(2.2) \quad \|f\|_{p,\lambda} = \sup_{0 < \rho < \text{diam}(\Omega)} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

In this paper we shall always assume (1.1) for a certain constant $A > 0$ and this implies that for $x \in \partial\Omega$, the proportion of $\Omega \cap B_\rho(x)$ is equivalent to $B_\rho(x)$.

Let us note that for $\lambda = 0, n$ we have

$$L^{p,n} = L^\infty, \quad L^{p,0} = L^p$$

Let Ω be a bounded open set in \mathbb{R}^n . For any $1 < q < \infty$ the space weak- $L^q(\Omega) = L^{q,\infty}(\Omega)$ consists of those (equivalence classes of) real valued measurable functions $f(x)$ on Ω satisfying the condition

$$\sup_{s > 0} s^q |\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}| < \infty.$$

$L^{q,\infty}(\Omega)$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{q,\infty} = \sup_E |E|^{\frac{1}{q}-1} \int_E |f| dx$$

where the supremum is taken over all measurable subsets E of Ω .

Let Ω be a measurable subset of \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, and $|\Omega|$ be the Lebesgue measure of Ω . The Zygmund space $L(\log L)(\Omega)$, consists of all measurable functions g on Ω for which

$$(2.3) \quad \int_\Omega |g| \log \left(e + \frac{|g|}{|g|_\Omega} \right) dx < \infty,$$

Let us remark that the function $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, defined by $\Phi(s) = s \log(e + s)$ is a Young function, i.e. is strictly increasing, convex and

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

and $L(\log L)(\Omega)$ is the Orlicz space generate by Φ . Moreover $\Phi(2t) \leq 2\Phi(t)$. Last inequality, known as Δ_2 -condition, implies that the step functions are dense in the norm topology of $L(\log L)(\Omega)$. The Luxemburg norm of a function $g \in L^\Phi(\Omega)$ is defined by

$$(2.3) \qquad \|g\|_{\Phi, \Omega} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|g|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

The quantity

$$(2.4) \qquad \int_{\Omega} |g| \log \left(e + \frac{|g|}{|g|_{\Omega}} \right) dx$$

defines a norm in $L \log L$ equivalent to the Luxemburg norm. The Zygmund space $EXP(\Omega)$, consists of all measurable functions f on Ω such that

$$(2.5) \qquad \|g\|_{EXP} = \inf \left\{ \mu > 0 : \int_{\Omega} e^{\left(\frac{|g|}{\mu}\right)} \leq 2 \right\} < \infty$$

EXP is the dual to $L(\log L)$, while $L(\log L)$ is the dual of the space \exp , which is defined as the closure of L^∞ in EXP .

We note that (2.4) is an order preserving norm.

3. The distance formula

Let $f \in L^{p, \lambda}(\Omega)$, where $0 \leq \lambda \leq n, 1 \leq p < \infty$, we define

$$(3.1) \quad M_{p, \lambda}(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{0 < \rho \leq r} \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x, \rho)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

3. Theorem 3.1. Let Ω be a bounded open set in \mathbf{R}^n , such that (1.1) holds. Then

$$(3.2) \quad \text{dist}_{L^{p,\lambda}}(f, L^\infty) = M_{p,\lambda}(f)$$

Proof. First of all we observe that

$$(3.3) \quad f \in L^{p,\lambda}, g \in L^\infty \Rightarrow M_{p,\lambda}(f) = M_{p,\lambda}(f + g)$$

In fact by Minkowski inequality we have

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho^n}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left(\frac{\rho^n}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\rho^n}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\frac{\rho^n}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \rho^{\frac{n-\lambda}{p}} \|g\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Since $0 \leq \lambda \leq n$, the last term of the previous inequality tends to zero as r goes to zero. So we have

$$(3.4) \quad M_{p,\lambda}(f + g) \leq M_{p,\lambda}(f)$$

On the other hand, by (3.4) we have

$$M_{p,\lambda}(f) = M_{p,\lambda}(f + g - g) \leq M_{p,\lambda}(f + g)$$

from which (3.3) follows. Since $M_{p,\lambda}(f - g) \leq \|f - g\|_{p,\lambda}$, by (3.3) we have

$$M_{p,\lambda}(f) \leq \text{dist}_{L^{p,\lambda}}(f, L^\infty)$$

Now we have to prove that

$$(3.5) \quad \sigma > M_{p,\lambda}(f) \Rightarrow \text{dist}_{L^{p,\lambda}}(f, L^\infty) \leq \sigma$$

In fact let $\delta > 0$ such that

$$0 < \rho < \delta \Rightarrow \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx < \sigma^p, \quad \forall x$$

By absolute continuity of the integral there exists $h_\sigma > 0$ such that

$$(3.6) \quad \int_{\Omega(x,\rho) \cap \{|f| > h_\sigma\}} |f|^p dx \leq \int_{\{|f| > h_\sigma\}} |f|^p dx < \sigma^p \delta^\lambda$$

We define $f_\sigma(x) = f(x)$, where $|f| \leq h_\sigma$ and vanishing otherwise. Let ρ belong to $]0, \text{diam}(\Omega)[$, we distinguish two cases.

If $\rho < \delta$ then

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f_\sigma - f|^p dx &= \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho) \cap \{|f| > h_\sigma\}} |f|^p dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega(x,\rho)} |f|^p dx < \sigma^p \end{aligned}$$

If $\rho > \delta$ then

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f_\sigma - f|^p dx &\leq \frac{1}{\delta^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |f_\sigma - f|^p dx = \\ &= \frac{1}{\delta^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho) \cap \{|f| > h_\sigma\}} |f|^p dx < \frac{1}{\delta^\lambda} \sigma^p \delta^\lambda = \sigma^p \end{aligned}$$

as desired.

So, in any case we get an estimate which implies (3.2).

4. Some Applications

First of all we come back to Trudinger's imbedding theorem already mentioned in the introduction:

Theorem 4.1 If $u \in W_{1,n-1}^1(\Omega)$ then there exists $\beta > 0$ such that

$$(4.1) \quad \int_{\Omega} e^{\beta|u|} dx < \infty$$

The result is optimal, as Trudinger himself proved by noting that $W_{1,n-1}^1$ may not be imbedded into Orlicz classes generated by $\Phi(t) = e^{bt} - bt - 1$ for generic $b > 0$.

Proposition 4.1 If u belongs to the closure of L^∞ in $W_{1,n-1}^1$ then (4.1) holds for any $\beta > 0$.

Proof It is sufficient to note that the Riesz potential

$$If(x) = \int_{\Omega} f(y)|x-y|^{1-n} dy$$

is linear, continuous from $L^{1,n-1}$ to EXP, and that $I(L^\infty) \subseteq L^\infty$.

Then using the equalities

$$\overline{L^\infty}^{L^{1,n-1}} = LV^{1,n-1}$$

$$\overline{L^\infty}^{EXP} = exp$$

we deduce immediately that

$$I : LV^{1,n-1} \longrightarrow exp$$

Bibliographic references

- [BS] C.Bennett, R.Sharpley (1988), *Interpolation of operators*, Academic Press.
- [CS] M.Carozza, C.Sbordone, *The distance to L^∞ in some function spaces and applications* (to appear).
- [CF] F.Chiarenza, M.Franciosi (1992), *A generalization of a theorem by C. Miranda*, Ann. Mat. Pura Appl., CLXI, 285-297.
- [IK] T.Iwaniec, R.Kosecki (1990), *Sharp estimates for complex potentials and quasi conformal mappings*, preprint of Siracuse University, 1-69.
- [Tru] N.S.Trudinger (1967), *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, Journal Mat. Mech., vol.17, 5, pag. 473-483.

Author's Address

C.Capone: Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"R.Caccioppoli" Università "Federico II" di
Napoli-Complesso di Monte Sant'Angelo, Via
Cinthia-80126 Napoli.

e-mail : capone1@matna2.dma.unina.it

M.R.Formica:Istituto per Applicazioni della Matematica
del C.N.R., Via P. Castellino n. 111 - 80131
Napoli.

ELLIPTIC EQUATIONS
WITH RIGHT HAND SIDE
IN $L(\log L)^\alpha$

NOTA DI ANTONIA PASSARELLI DI NAPOLI e CARLO SBORDONE

PRESENTATA DAL SOCIO CARLO SBORDONE

ADUNANZA DELL' 11/11/1995

Riassunto. Utilizzando tecniche di dualità, si perviene ad un risultato di regolarità per la soluzione debole di un problema di Dirichlet con termine noto in $L(\log L)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, che completa quello ottenuto nel 1963 da G. Stampacchia, relativo al caso $\alpha = 1$.

Abstract. Using duality techniques, we give a regularity result for the weak solution of a Dirichlet problem, with right hand side in $L(\log L)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, which improves a result of G. Stampacchia (1963) concerning the case $\alpha = 1$.

Key words and phrases: Regularity. Partial differential equations.

This work has been supported by M.U.R.S.T. (40%).

1. Introduction

In this paper we first establish some estimates for the solutions of the Dirichlet problem

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j u) = \operatorname{div} \psi \\ u \in H_0^{1,1}(\Omega) \end{cases}$$

with $\psi_i \in L^n \log^{-\sigma} L(\Omega)$, Ω bounded open set in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), $0 \leq \sigma \leq 1$.

(see section 2 for the definition of $L^p \log^{-\sigma} L(\Omega)$)

The operator in (1.1)

$$(1.2) \quad L = -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j)$$

is uniformly elliptic, i.e.

$$(1.3) \quad \begin{cases} \lambda_0 |\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0 |\xi|^2 \\ a_{ij} = a_{ji} \end{cases}$$

As a counterpart of the estimate (Theorem 3.1)

$$(1.4) \quad \|u\|_{\exp \frac{n}{n-1+\sigma}} \leq K \sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{L^n \log^{-\sigma} L},$$

where \exp_β denotes the closure of L^∞ in the space EXP_β of functions $u \in L^1(\Omega)$ such that

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|u|)^\beta < \infty \quad \text{for a } \lambda > 0,$$

we obtain a regularity theorem for very weak solutions of the Dirichlet problem

$$(1.5) \quad \begin{cases} Lv = f & \text{on } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $f \in L(\log L)^\alpha$.

The method we follow is a duality technique employed by G. Stampacchia in [S], in the case $\alpha = 1$ (see Theorem 4.1). If $f \in L(\log L)^\alpha$ we get the estimate for the gradient Dv

$$(1.6) \quad \|Dv\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\log L)^{\frac{n\alpha}{n-1}-1}} \leq K \|f\|_{L(\log L)^\alpha}.$$

Let us note that in the case $\alpha = 1$, (1.6) reduces to

$$(1.7) \quad \|Dv\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\log L)^{\frac{1}{n-1}}} \leq K \|f\|_{L(\log L)},$$

which improves Stampacchia's estimate.

Recent regularity results for problem (1.1) have been obtained by [AFT], [F], [GT]; for problem (1.5) by [AF], [BoMu], [BrMe], [CL]; for both problems (1.1) and (1.5) by [C2], [L], [LP].

The pioneering paper by Talenti ([Ta]) originated many of these researches. We will employ a general existence principle dealing with duality, which goes back to G. Fichera [F], [M].

Only sketches of proofs are presented. The complete proofs and other results will appear. ([PS])

2. Notations and properties of some function spaces

Let Ω be a measurable subset of \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, and $|\Omega|$ be the Lebesgue measure of Ω . Given a real-valued measurable function f defined on Ω , the distribution function of f is

$$\mu(t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$$

and the decreasing rearrangement of f is

$$(2.1) \quad f^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\}.$$

The Zygmund space $L^p(\log L)^\alpha(\Omega)$, ($1 \leq p < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$), consists of all measurable functions g on Ω for which

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} |g|^p \log^\alpha \left(e + \frac{|g|}{|g|_{\Omega}} \right) dx < \infty,$$

where

$$|g|_{\Omega} = \int_{\Omega} |g| = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g|.$$

Let us remark that if $\alpha \geq 0$, the function $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, defined by $\Phi(s) = s^p \log(e + s)^\alpha$ is a Young function, i.e. is strictly increasing, convex and

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

and $L^p(\log L)^\alpha(\Omega)$ is the Orlicz space generate by Φ . Moreover $\Phi(2t) \leq 2^p \Phi(t)$. Last inequality, known as Δ_2 -condition, implies that the step functions are dense in the norm topology of $L^p(\log L)^\alpha(\Omega)$. The Luxemburg norm of a function $g \in L^\Phi(\Omega)$ is defined by

$$(2.3) \quad \|g\|_{\Phi, \Omega} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|g|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

If $p = \alpha = 1$, the quantity

$$\langle g \rangle_{\Omega} = \begin{cases} \int_{\Omega} |g| \log \left(e + \frac{|g|}{|g|_{\Omega}} \right) dx & \text{se } f \neq 0 \\ 0 & \text{se } f \equiv 0 \end{cases}$$

defines a norm in $L \log L$ equivalent to the Luxemburg norm. The Zygmund space $EXP_{\beta}(\Omega)$, ($\beta > 0$), consists of all measurable functions f on Ω such that

$$(2.4) \quad \|g\|_{EXP_{\beta}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} e^{\left(\frac{|g|}{\lambda}\right)^{\beta}} < 2 \right\} < \infty$$

EXP_{β} is the dual to $L(\log L)^{\frac{1}{\beta}}$, while $L(\log L)^{\frac{1}{\beta}}$ is the dual of the space \exp_{β} , which is defined as the closure of L^{∞} in EXP_{β} .

It can be shown (see [BS], pag 247) that $g \in L^p(\log L)^{\alpha}(\Omega)$ iff

$$\int_0^{\infty} (1 + |\log t|)^{\alpha} g^{*}(t)^p dt < \infty$$

and that for $p > 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$ the dual of $L^p(\log L)^{\sigma}$ coincides with $L^{p'}(\log L)^{-\sigma \frac{p'}{p}}$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

3. The right hand side in divergence form

The main result of this section is the following:

Theorem 3.1. *Let u be the weak solution of the Dirichlet problem*

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j u) = \operatorname{div} \psi & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

with $(\sum \psi_i^2)^{\frac{1}{2}} = |\psi| \in L^n \log^{-\sigma} L(\Omega)$, Ω a bounded open set in \mathbb{R}^n , $0 \leq \sigma \leq 1$. Then

$$(3.2) \quad \|u\|_{\exp \frac{n}{n-1+\sigma}} \leq K \|\psi\|_{L^n \log^{-\sigma} L}$$

SKETCH OF THE PROOF. As in [GT] and [C], see also [AFT], we use the estimate of Talenti

$$(3.3) \quad u^*(s) \leq \frac{1}{nC_n^{\frac{1}{n}}} \int_s^{|\Omega|} g(r)r^{-1+\frac{1}{n}} dr$$

for $0 < s < |\Omega|$, where g is a measurable function on $(0, |\Omega|)$ such that

$$(3.4) \quad \int_0^s g^*(r)^2 dr \leq \int_0^s |\psi|^*(r)^2 dr, \quad s \in (0, |\Omega|)$$

As in [C2], from (3.3), using the Sobolev inequality for functions $w \in H_0^{1,1}$ such that $Dw \in L^n \log^{-\sigma} L$ due to Fusco-Lions-Sbordone ([FLS])

$$\|w\|_{\exp \frac{n}{n-1+\sigma}} \leq C \|Dw\|_{L^n \log^{-\sigma} L},$$

we arrive at

$$\|u\|_{\exp \frac{n}{n-1+\sigma}} \leq K \|g\|_{L^n \log^{-\sigma} L}.$$

Inequality (3.4) implies

$$\|g^2\|_{L^{\frac{n}{2}} \log^{-\sigma} L} \leq \|f^2\|_{L^{\frac{n}{2}} \log^{-\sigma} L}$$

which clearly is equivalent to

$$\|g\|_{L^n \log^{-\sigma} L} \leq \|f\|_{L^n \log^{-\sigma} L}$$

i.e. the assertion. ■

4. The right hand side in $L(\log L)^\alpha$

Let L be a linear operator of the type (1.2), (1.3). Following [S], we give the definition of a very weak solution v of the Dirichlet problem

$$(4.1) \quad \begin{cases} Lv = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $f \in L^1(\Omega)$.

A function $v \in H_0^{1,1}(\Omega)$ is a very weak solution of (4.1) if

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} vL\phi dx = \int_{\Omega} f\phi dx$$

for any $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that $L\phi \in L^n(\Omega)$.

Theorem 4.1. *If $0 < \alpha \leq 1$, $f \in L(\log L)^\alpha$, then for the solution v of (4.1) the estimate*

$$(4.3) \quad \|Dv\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\log L)^{\frac{n\alpha}{n-1}-1}} \leq K \|f\|_{L(\log L)^\alpha}.$$

holds.

PROOF. Let ψ_i belong to $\frac{L^n}{(\log L)^{n\alpha-n+1}}$ and let ϕ solve the problem

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j u) = \text{div} \psi \\ \phi \in H_0^{1,1}(\Omega). \end{cases}$$

Theorem 3.1 implies

$$\|\phi\|_{\text{exp} \frac{1}{\alpha}} \leq K \|\psi\|_{L^n(\log L)^{n-1-n\alpha}}.$$

We have

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} v \operatorname{div} \psi dx \right| &= \left| \int_{\Omega} v L \phi dx \right| = \left| \int_{\Omega} f \phi dx \right| \\
 (4.4) \qquad \qquad \qquad &\leq \|f\|_{L(\log L)^\alpha} \|\phi\|_{EXP_{\frac{1}{\alpha}}} \\
 &\leq K \|f\|_{L(\log L)^\alpha} \|\psi\|_{L^n(\log L)^{n-1-n\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Since $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ is arbitrary, taking the supremum over all such ψ with

$$\|\psi\|_{L^n(\log L)^{n-1-n\alpha}} \leq 1$$

we arrive at the estimate

$$\|Dv\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\log L)^{\frac{n\alpha}{n-1}-1}} \leq K \|f\|_{L(\log L)^\alpha}$$

by using the fact that the dual of $L^p(\log L)^\gamma$ is $L^{p'}(\log L)^{-\gamma \frac{p'}{p}}$ if $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. ■

5. A kind of duality between Dirichlet problems

As we will see in [PS], the argument used in the proof of Theorem 4.1 to deduce the regularity of the very weak solution of the problem

$$(5.1) \qquad \qquad \qquad \begin{cases} Lv = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

from that of the problem

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j\phi) = \operatorname{div}\psi \\ \phi \in H_0^{1,1}(\Omega). \end{cases}$$

may be used in the opposite direction to deduce the regularity of the weak solution of the problem (5.2) from that of the problem (5.1). This type of setting is very well explained by the following existence principle due to G. Fichera ([F]).

Existence Principle *Let V , B_1 , B_2 be Banach spaces and let B_1^* , B_2^* be the dual spaces of B_1 , B_2 respectively. Let us consider two linear maps*

$$M_1 : V \rightarrow B_1 \quad M_2 : V \rightarrow B_2.$$

For any $\Phi \in B_1^$ there exists a $\Psi \in B_2^*$ such that*

$$(5.3) \quad \langle \Psi, M_2(v) \rangle = \langle \Phi, M_1(v) \rangle \quad \forall v \in V$$

if and only if

$$(5.4) \quad \|M_1(v)\|_{B_1} \leq K \|M_2(v)\|_{B_2} \quad \forall v \in V.$$

Moreover there exists a $\Psi \in B_2^$ in the set of solutions of (5.3) such that*

$$\|\Psi\|_{B_2^*} \leq K \|\Phi\|_{B_1^*}$$

Now let us prove the following

Theorem 5.1 *Let us consider the problem*

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j\phi) = \operatorname{div}\psi \\ \phi \in H_0^{1,1}(\Omega). \end{cases}$$

where ψ belongs to a Banach space F . If the solution ϕ of (5.2) satisfies the estimate

$$\|\phi\|_{E^*} \leq K\|\psi\|_F$$

then the gradient of the solution v of the problem ($f \in E$)

$$(5.1) \quad \begin{cases} Lv = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfies the estimate

$$\|Dv\|_{F^*} \leq K\|f\|_E$$

with the same constant K .

PROOF. It suffices to observe that

$$\|Dv\|_{F^*} = \sup_{\|\psi\|_F \leq 1} \left| \int_{\Omega} Dv \cdot \psi \right|$$

and that, by the definition of very weak solution,

$$\left| \int_{\Omega} Dv \cdot \psi \right| = \left| \int_{\Omega} f \cdot \phi \right| \leq \|f\|_E \|\phi\|_{E^*} \leq K\|f\|_E \|\psi\|_F \quad \blacksquare$$

Theorem 5.2 *Let us consider the problem*

$$(5.1) \quad \begin{cases} Lv = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $f \in E$. If the gradient of the solution v satisfies the estimate

$$\|Dv\|_{F^*} \leq K\|f\|_E$$

then the solution ϕ of the problem

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j\phi) = \operatorname{div}\psi \\ \phi \in H_0^{1,1}(\Omega). \end{cases}$$

satisfies the estimate

$$\|\phi\|_{E^*} \leq K\|\psi\|_F$$

with the same constant K .

PROOF. It suffices to observe that

$$\|\phi\|_{E^*} = \sup_{\|f\|_E \leq 1} \left| \int_{\Omega} f \cdot \phi \right|$$

and that

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot \phi \right| = \left| \int_{\Omega} Dv \cdot \psi \right| \leq \|Dv\|_{F^*} \|\psi\|_F \leq K\|f\|_E \|\psi\|_F. \quad \blacksquare$$

References

- [AF] - A. ALBERICO - V. FERONE-*Regularity properties of solutions of elliptic equations in \mathbb{R}^2 in limit cases* -Preprint Dip. Mat. e Appl. "R. Caccioppoli" n.18 (1995).
- [AFT] - A. ALVINO - V. FERONE- G. TROMBETTI-*Moser-type inequalities in Lorentz spaces* -to appear on Potential Anal..
- [BeS] -C. BENNET - R. SHARPLEY-*Interpolation of Operators* -Acad. Press (1988)
- [BoMu] -L. BOCCARDO - F. MURAT-*A property of nonlinear elliptic equations when the right hand side is a measure* - Potential Anal.3 (1994), pp.257-263.
- [BrMe] -H. BREZIS - F. MERLE-*Uniform estimate and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions* - Comm. in P.D.E.16 (1991), pp.1223-1253.
- [CL] -S. CHANILLO - Y. LI -*Continuity of solutions of uniformly elliptic equations in \mathbb{R}^2* - Manu.Math. 77 (1992), 4, pp.415-433.
- [C1] - A. CIANCHI-*Embedding theorem for Orlicz Sobolev spaces* - to appear .
- [C2] - A. CIANCHI-*Interpolation of operators and the Sobolev embedding Theorem in Orlicz spaces* - to appear .
- [CS] - M. CAROZZA-C. SBORDONE-*The distance to L^∞ in some function spaces and applications*- Preprint Dip. Mat. e Appl. "R. Caccioppoli" n.44 (1995).
- [D] -T. DEL VECCHIO-*Nonlinear elliptic equations with measure data*- Potential Anal. (1995)

- [F] - G. FICHERA - *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari, I - II* - Rend. Acc. Lincei **XXI** (1956), pp.46-55 and pp.166-172 .
- [FLS] - N. FUSCO - P.L. LIONS - C. SBORDONE - *Sobolev imbeddings theorems in borderline cases* - Proc AMS (1995), to appear.
- [GT] - E. GIARRUSSO - G. TROMBETTI - *Estimates for solutions of elliptic equations in a limit case* - Bull. Austral. Math. Soc. **36** (1987), pp.425-434.
- [G] - L. GRECO - *A remark on the equality $\det Df = \text{Det} Df$* - Differential and integral equations **6**, **5** (1993) pp. 1089-1100.
- [GIS] - L. GRECO - T. IWANIEC - C. SBORDONE - *Variational integrals of nearly linear growth* - to appear.
- [KR] - M. A. KRANOSSEL'SKII - Y. B. RUTICKII - *Convex functions and Orlicz spaces* - Noordhoff, Groningen, (1961).
- [L] - V.A. LISKEVICH - *Some limit cases in estimates for solutions of second order elliptic equations* - Houston J. of Math. **19** (1993), pp.661-673.
- [LP] - V.A. LISKEVICH - M.A. PEREL'MUTER - *Summability properties of solutions of second order elliptic equations* - Math.Zametki **43** (1988) pp.337-345 (Russian). English trans. Math. Notes **43** (1988) pp.194-198.
- [M] - C. MIRANDA - *Partial differential equations of elliptic type* - Springer - Verlag (1970)
- [PS] - A. PASSARELLI DI NAPOLI - C. SBORDONE - to appear
- [RR] - M. M. RAO - Z. D. REN - *Theory of Orlicz spaces* - Marcel Dekker (1991).

- [S] - G. STAMPACCHIA - *Some limit cases of L^p - estimates for solutions of second order elliptic equations* -Comm. in P.D.E. **16** (1963), pp. 505-510 .
- [S] - E. M. STEIN-*Note on the class $L\log L$* -Studia Math. **32** (1969), pp. 305-310.
- [Ta] - G. TALENTI-*Elliptic equations and rearrangements*- Ann. Scuola Norm. Sup.Pisa (4) **3** (1976), pp.697-718.
- [To] - A. TORCHINSKY-*Real variable methods in harmonic analysis* - Academic Press, (1987).

Antonia Passarelli di Napoli and Carlo Sbordone
Dip. di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
Università degli studi di Napoli "Federico II"
Via Cintia-80126 Napoli
e-mail : passarel@matna2.dma.unina.it
e-mail: sbordone@matna1.dma.unina.it

ON THE STABILITY OF COUETTE-POISEUILLE FLOWS
IN THE ANISOTROPIC MHD
VIA THE LIAPUNOV DIRECT METHOD

Nota di Salvatore Rionero * e Michele Maiellaro**
Presentata dal Socio Prof. S.Rionero

Adunanza del 11/11/95

Riassunto. Si studia la stabilità dei moti di Couette-Poiseuille in uno strato orizzontale di fluido elettroconduttore immerso in un campo magnetico coplanare, in presenza di correnti di Hall e di ion-slip. Si prova che, almeno per effetto di perturbazioni laminari nella direzione del campo magnetico di immersione, non si creano fenomeni di accumulo instabilizzanti.

Abstract. The stability of the Couette-Poiseuille flow in a horizontal layer - filled by an electrically conducting fluid imbedded in a coplanar magnetic field - is studied. On taking into account Hall and ion-slip effects, it is shown that, at least when the perturbations are laminar and parallel to the imbedding magnetic field, does not exist an instabilizing focusing effect.

1. Introduction

Let (O, e_i) ($i = 1, 2, 3$) be an orthogonal frame of reference with e_3 pointed vertically upward and let Ω be the horizontal layer of thickness $2d$ bounded by the planes Σ_1 ($z = -d$) and Σ_2 ($z = d$), assumed both rigid and electrically non conducting. The stability of the MHD Couette-Poiseuille flows in Ω have been studied by many authors both in the presence of isotropic currents [1, 2] as well as in the anisotropic case when the Hall and ion-slip currents are present [3, 4, 5]. In particular in [4, 5] - among other things - conditions ensuring the nonlinear stability of these flows, in the presence of both the mentioned anisotropic currents, have been obtained.

Owing to the high nonlinearity of the problem, in [4, 5] solely laminar and onedimensional perturbations are considered. Nevertheless the stability conditions there obtained when the layer is imbedded in a coplanar magnetic field, appear not easy and very restrictive. For these reasons one can fear for an instabilizing "focusing effect". In the present paper we reconsider the problem and show that this effect does not exist. The plan of the paper is the following. We begin by considering some preliminaries and recalling the MHD equations in the presence of Hall and ion-slip currents (Sect. 2) and the Couette-Poiseuille flow M arising when the layer is imbedded in a coplanar magnetic field (Sect. 3). Successively after some preliminaries on the stability of M (Sect. 4), we show that, in the L^2 -norm, this motion is nonlinearly stable with respect to the laminar perturbations parallel to the imbedding magnetic field (Sect. 5), and linearly stable with respect to the laminar perturbations non parallel to this field (Sect. 6). Then (Sect. 7) we study the nonlinear stability with respect to the laminar perturbations coplanar to the layer and show that the imbedding magnetic field has a strong stabilizing effect. In the last section (Sect. 8) we conclude with some remarks on the results obtained.

2. Preliminaries and recall of the MHD equations in the presence of Hall and ion-slip currents

Let us consider an incompressible viscous electrically conducting fluid imbedded in a magnetic field \mathbf{H} . In the nonrelativistic case, the mathematical model governing the interactions between the fluid and \mathbf{H} are obtained by coupling the Navier-Stokes equations to the Maxwell's equations. Neglecting the displacement currents, assuming that a conservative force \mathbf{F} (typically the gravity force) is acting on the fluid and taking into account the Lorentz force, in the isothermal case one obtains the following equations:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}; & \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_e \mathbf{H}_t \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p - \rho U) + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu_e}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; & \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where

\mathbf{v} = velocity field, ρ = mass density
 \mathbf{E} = electric field, μ_e = magnetic permeability
 p = pressure field, ν = kinematic viscosity
 U = gravity potential, \mathbf{J} = current density vector.

When the fluid is an isotropic conductor of electricity, the classical constitutive equation for \mathbf{J} is

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (2)$$

where σ_e is the scalar electrical conductivity. Equation (2) is a particular case of the general constitutive equation [2]

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (3)$$

where \mathbf{S} is a double tensor denoting the anisotropic electrical conductivity. There are several cases of real physical interest in which the anisotropy cannot be neglected. This happens, for instance, for a weakly ionized gas in a strong magnetic field (when the mass fraction of the neutral particles is close to the unity and the product $\omega_e \tau$ of the cyclotronic frequency ω_e of the charged particles multiplied by the mean collision time τ is far greater than unity). In these cases equation (2) can be written [2]

$$\mathbf{J} + \mu_e \sigma_e \beta_H \mathbf{J} \times \mathbf{H} + \sigma_e \mu_e \beta_I \mathbf{H} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{H}) = \sigma_e (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{\nabla p_e}{en_e}) \quad (4)$$

where

e = electron charge
 n_e = electrons number density
 p_e = electronic pressure
 β_H = Hall coefficient
 β_I = ion-slip coefficient.

From equations (1) and (4) it turns out the following well known mathematical model:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p^* + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu_e}{\rho} \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \eta_e \Delta \mathbf{H} + \beta_H \nabla \times (\mathbf{H} \times \nabla \times \mathbf{H}) \\ \quad + \beta_T \nabla \times [\mathbf{H} \times (\mathbf{H} \times \nabla \times \mathbf{H})] \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

where $p^* = 1/\rho(p - \rho U)$ and $\eta_e = 1/\mu_e \sigma_e$ is the magnetic viscosity.

To equations (5) initial and (suitable) boundary conditions must be appended. When the motion occurs in a layer Ω bounded by two rigid electrically non-conducting planes Σ_i ($i = 1, 2$), Σ_1 being in rest and Σ_2 translating with the constant velocity $V \mathbf{e}_1$ ($V = \text{const.} > 0$), the boundary conditions are

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \Sigma_1 \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = V \mathbf{e}_1 & \mathbf{x} \in \Sigma_2 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_{\Sigma_1} & \mathbf{x} \in \Sigma_1 \\ \mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_{\Sigma_2} & \mathbf{x} \in \Sigma_2 \end{array} \right. \quad (7)$$

where \mathbf{H}_{Σ_i} ($i = 1, 2$) denotes the tangential external magnetic field.

Remark 1 - The solvability of problem (5) - (7), in suitable Sobolev and Hölder's spaces, has been recently established [6, 7]. In the sequel, however, we consider sufficiently smooth solutions.

3. Couette-Poiseuille flows in a layer imbedded in a coplanar magnetic field

Denoting by H_i ($i = 1, 2$) two constants, let us consider¹

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{H}_{\Sigma_1} = H_1 \mathbf{e}_1 & \text{on } \Sigma_1 \\ \mathbf{H}_{\Sigma_2} = H_2 \mathbf{e}_1 & \text{on } \Sigma_2. \end{array} \right. \quad (8)$$

¹This happens, for instance, when Ω is imbedded in a coplanar magnetic field.

Then, in the set of the onedimensional laminar flows of the type

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v(z)\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{H} = H(z)\mathbf{e}_1, \end{cases} \quad (9)$$

the boundary conditions (6) – (7) become

$$v(-d) = 0; \quad v(d) = V \quad (10)$$

$$H(-d) = H_1, \quad H(d) = H_2. \quad (11)$$

From equations (5) it turns out that the flows (9) have to satisfy the system

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(p^* + \frac{\mu_e}{2\rho}H^2) = -k \\ \nu \frac{d^2 v}{dz^2} = -k \\ \eta_e \frac{d^2 H}{dz^2} + \beta_I \frac{d}{dz}(H^2 \frac{dH}{dz}) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

where $-k$ is a constant denoting the total pressure gradient.

In view of (12) then it follows that

$$\begin{cases} p^* + \frac{\mu_e}{2\rho}H^2 = -kx + p_1^* \\ v = \frac{V}{2d}(z+d) - \frac{k}{2\nu}(z^2 - d^2) \\ \beta_I H^3 + 3\eta_e H + c_1 z + c_2 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

p_1^* and c_i ($i = 1, 2$) being constants. Since the discriminant is always positive, exists one and only one real solution of (13)₃. Therefore, on taking into account conditions (11), it is easily seen [4] that the following Couette-Poiseuille flow \mathcal{M} is allowed

$$\begin{cases} v = \frac{V}{2d}(z+d) - \frac{k}{2\nu}(z^2 - d^2) \\ H = \sqrt[3]{f + \sqrt{f^2 + \alpha}} + \sqrt[3]{f - \sqrt{f^2 + \alpha}} \\ p^* + \frac{\mu_e}{2\rho}H^2 = -kx + p_1^* \end{cases} \quad (14)$$

where

$$\begin{cases} f = -\frac{c_1 z + c_2}{2\beta_I}, & \alpha = \left(\frac{\eta_e}{\beta_I}\right)^3 \\ c_1 = \frac{1}{2d}[\beta_I(H_1^3 - H_2^3) + 3\eta_e(H_1 - H_2)] \\ c_2 = -\frac{1}{2}[\beta_I(H_1^3 + H_2^3) + 3\eta_e(H_1 + H_2)]. \end{cases} \quad (15)$$

4. Preliminaries on the stability of \mathcal{M}

Let us denote by (\mathbf{u}, \mathbf{h}) a perturbation to the basic motion \mathcal{M} . Further, let S be the set (assumed not empty) of the smooth perturbations (\mathbf{u}, \mathbf{h}) such that

$$\begin{cases} \mathbf{u} = u_1(z, t)\mathbf{e}_1 + u_2(z, t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{h} = h_1(z, t)\mathbf{e}_1 + h_2(z, t)\mathbf{e}_2. \end{cases} \quad (16)$$

It is easily seen [4, 5] that the following dimensionless equations and boundary conditions hold²

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} & i = 1, 2 \quad (z, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} + \frac{1}{3}R[(3H^2 h_1 + 3H h_1^2 + h_1^3)_z + 3(H + h_1)h_2 \frac{\partial h_2}{\partial z}]_z \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} + \frac{1}{3}R[\frac{3}{2}h_2 \frac{\partial}{\partial z}(H + h_1)^2 + \frac{\partial h_2^3}{\partial z}]_z, \end{cases} \quad (17)$$

$$u_i(\pm 1, t) = h_i(\pm 1, t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

where $\sigma = \nu/\eta_e$, $R = (\beta_I \tilde{H}^2)/\eta_e$.

²We have set

$$z' = \frac{z}{d}, \quad u' = \frac{1}{V}u, \quad h' = \frac{1}{\tilde{H}}h, \quad t' = \frac{\eta_e}{d^2}t$$

where \tilde{H} is a reference magnetic field. Further, for the sake of simplicity, in the equations (17) primes have been removed.

Remark 2 - Let λ be a positive constant and consider the I.B.V.P.

$$\begin{cases} u_t = \lambda u_{zz} & (z, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ u(\pm 1, t) = 0 \\ u(z, 0) = u_0(z) & z \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (19)$$

Denoting by $\|f\|$ the L^2 -norm of a function $f \in C^2[-1, 1]$, then it follows that:

$$\frac{d}{dt} \|u_z\|^2 = 2 \int_{-1}^1 u_z u_{zt} dz = 2[u_z u_t]_{z=-1}^{z=1} - 2 \int_{-1}^1 u_{zz} u_t dz.$$

But (19)₂ implies $u_t(\pm 1, t) = 0$, therefore it turns out that

$$\frac{d}{dt} \|u_z\|^2 = -2\lambda \|u_{zz}\|^2.$$

In view of (19)₂, it follows that {[8] p. 249-250}

$$\int_{-1}^1 u_z^2 dz \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 u_{zz}^2 dz$$

hence

$$\frac{d}{dt} \|u_z\|^2 \leq -2\lambda\pi^2 \|u_z\|^2$$

i.e.

$$\|u_z\|^2 \leq \|u_z(0)\|^2 e^{-2\lambda\pi^2 t}$$

which, in the case at hand, implies the asymptotic exponential stability in the point-wise norm too {[8], Remark 2.7 }.

Remark 3 - The velocity and the magnetic fields are uncoupled in the equations (17). Therefore, on taking into account Remark 2, it follows that the stability of the basic motion M , with respect to the perturbations belonging to \mathcal{S} , depends solely on the behaviour of the magnetic field.

Remark 4 - Let us denote by \mathcal{S}_1 the subset of \mathcal{S} such that $h_2 \equiv 0$. Then, on taking into account the Remarks 1 and 2 and setting $h_1 = h$, it

follows that the stability with respect to these perturbations depends solely on the behaviour of the solutions to the I.B.V.P.:

$$\begin{cases} h_t = [(1 + RH^2)h + RHh^2 + \frac{1}{3}Rh^3]_{zz}, & z \in (-1, 1), t \geq 0 \\ h(\pm 1, t) = 0 \\ h(z, 0) = h_0(z), \end{cases} \quad (20)$$

5. Nonlinear stability of \mathcal{M} with respect to the perturbations belonging to S_1

On setting

$$F = (1 + RH^2)h + RHh^2 + \frac{1}{3}Rh^3, \quad (21)$$

$$G(h) = \int_0^h F(H, s) ds, \quad (22)$$

it follows that

$$G(h) = \frac{h^2}{12} [6 + 2RH^2 + R(2H + h)^2] \quad (23)$$

which implies

$$G(0) = 0, \quad G(h) > 0, \quad h \neq 0. \quad (24)$$

On introducing the Liapunov function

$$\mathcal{E} = \int_{-1}^1 G[H(z), h(z, t)] dz \geq \frac{1}{2} \|h\|_2^2, \quad (25)$$

it follows

$$\dot{\mathcal{E}} = - \int_{-1}^1 (F_z)^2 dz. \quad (26)$$

In view of (20)₂, it turns out that

$$z = \pm 1 \rightarrow F = 0,$$

hence the Poincaré inequality [8] implies

$$\dot{\mathcal{E}} \leq -\pi^2 \int_{-1}^1 F^2 dz. \quad (27)$$

But it is an easy matter to verify that

$$\begin{aligned} F &= \frac{h}{3} [3 + 3RH(h + H) + Rh^2] = \frac{h}{6} [6 + 6RH(h + H) + 2Rh^2] \\ &= \frac{h}{6} \{6 + RH^2 + R[(H + h)^2 + (2H + h)^2]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{h^2}{36} \{6 + RH^2 + R[(H + h)^2 + (2H + h)^2]\}^2 \geq \\ &\geq \frac{h^2}{36} \{6 + RH^2 + R(2H + h)^2\}^2 \\ &\geq \frac{h^2}{36\sqrt{2}} \{6 + 2RH^2 + R(2H + h)^2\}^2, \end{aligned}$$

and immediately it follows that

$$F^2 \geq \sqrt{2} G. \quad (28)$$

Therefore from (27) we obtain

$$\dot{\mathcal{E}} \leq -\sqrt{2}\pi^2 \mathcal{E}$$

i.e.

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{-\sqrt{2}\pi^2 t}, \quad \forall t > 0. \quad (29)$$

In view of (25) it follows that

$$\|h\|_2^2 \leq 2\mathcal{E}(0)e^{-\sqrt{2}\pi^2 t}, \quad (30)$$

which ensures the asymptotic stability in the L_2 -norm of the basic magnetic field \mathbf{H} with respect to the laminar perturbations belonging to S_1 .

Remark 5 - We notice that the procedure followed in this section can be used for the general equation {[8] pp. 61 – 62}

$$h_t = [f(z, h)]_{zz}.$$

6. Linear stability of \mathcal{M} with respect to the perturbations belonging to S

Linearizing, from (17) – (18) it follows

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} = [(1 + RH^2)h_1]_{zz}, & (z, t) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ h_1(\pm 1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_2}{\partial t} = (h_2)_{zz} + \frac{R}{2}[(H^2)'h_2]_z, & (z, t) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ h_2(\pm 1, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (32)$$

and hence h_1 and h_2 are uncoupled.

The system (31) is of the type (20) and therefore can be treated in the same manner. In fact on setting

$$F_1 = (1 + RH^2)h_1, \quad G_1 = \int_0^{h_1} F_1 dh_1 = \frac{1}{2}(1 + RH^2)h_1^2,$$

and introducing the Liapunov function

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-1}^1 G_1[H(z), h_1(z, t)] dz,$$

it follows that

$$\begin{cases} F_1(z = \pm 1) = 0, & \mathcal{E}_1 \geq \frac{1}{2} \|h_1\|_2^2 \\ \dot{\mathcal{E}}_1 = - \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)^2 dz \leq -\pi^2 \int_{-1}^1 F_1^2 dz. \end{cases}$$

But $F_1^2 \geq 2G_1$, hence it turns out that

$$\dot{\mathcal{E}}_1 \leq -2\pi^2 \mathcal{E}_1$$

and therefore

$$\|h_1\|_2^2 \leq 2\mathcal{E}_1 \leq 2\mathcal{E}_1(0)e^{-2\pi^2 t}. \quad (33)$$

On passing to system (32) and setting

$$\begin{cases} w = h_2 \\ g(z) = \frac{1}{2}R \frac{d}{dz} H^2, \end{cases} \quad (34)$$

it follows that

$$\begin{cases} w_t = w_{zz} + [g(z)w]_z & (z, t) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ w(\pm 1, t) = 0 & t \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

On setting

$$\begin{cases} \varphi(z) = \frac{1}{2}RH^2 \\ \alpha = \min_{z \in [-1, 1]} \varphi(z), \quad \beta = \max_{z \in [-1, 1]} \varphi(z) \end{cases} \quad (36)$$

and introducing the Liapunov function

$$V = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\varphi(z)} w^2 dz \quad (37)$$

it turns out that

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_{-1}^1 e^{\varphi} w (w_z + gw)_z dz = - \int_{-1}^1 e^{\varphi} (w_z + gw)^2 dz = \\ &= - \int_{-1}^1 e^{-\varphi} \left[\frac{d}{dz} (e^{\varphi} w) \right]^2 dz \leq -e^{-\beta} \int_{-1}^1 \left[\frac{d}{dz} (e^{\varphi} w) \right]^2 dz. \end{aligned} \quad (38)$$

On taking into account the Poincaré inequality and (36), we obtain

$$\dot{V} \leq -\frac{e^{-\beta}}{2\pi^2} \int_{-1}^1 e^{2\varphi(z)} w^2 dz \leq -\frac{e^{\alpha-\beta}}{2\pi^2} \int_{-1}^1 e^{\varphi(z)} w^2 dz = -\frac{e^{\alpha-\beta}}{2\pi^2} V$$

i.e.

$$\begin{cases} V \leq V_0 e^{-ct} \\ c = \frac{e^{\alpha-\beta}}{2\pi^2}. \end{cases} \quad (39)$$

On the other hand the weighted L^2 -norm $\|e^{\varphi/2} w\|$ is equivalent to the L^2 -norm of w according to

$$e^\alpha \int_{-1}^1 w^2 dz \leq \int_{-1}^1 e^{\varphi(z)} w^2 dz \leq e^\beta \int_{-1}^1 w^2 dz,$$

then it follows that

$$\|w\|_2^2 \leq 2e^{\beta-\alpha} \|w_0\|_2^2 e^{-ct}. \quad (40)$$

Remark 3 and (33) + (34)₁ + (40) imply the linear asymptotic stability of \mathcal{M} with respect to the perturbations belonging to S in the L^2 -norm.

Remark 6 - We remark that in the case $H_1 = H_2$ it follows $H = \text{const.} = H_1, \forall z \in [-1, 1]$. Therefore (31) and (32) are of the type (19) and Remark 2 can be used for treating (31) and (32).

7. Nonlinear stability of \mathcal{M} with respect to the perturbations belonging to S

In view of (16) – (18), it follows that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{h}\|^2 &= -\left\| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 - R \left[\left\| H \frac{\partial h_1}{\partial z} \right\|^2 + \left\| \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 \right] + \\ &- R \int_{-1}^1 H \left[\frac{dH}{dz} \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial h_1}{\partial z} \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right) \right] dz + \\ &- R \int_{-1}^1 H \frac{dH}{dz} h_1 \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right) dz, \end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{h}\|^2 &= - \left[\left\| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 + R \left\| H \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 \right] + \\ &- R \int_{-1}^1 \left[\frac{dH}{dz} h_1 \left(H \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right) + H \frac{dH}{dz} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right] dz. \quad (41) \end{aligned}$$

But (18) implies

$$\int_{-1}^1 H \frac{dH}{dz} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} dz = -\frac{1}{4} \int \frac{d^2 H^2}{dz^2} h^2 dz,$$

hence on adding and subtracting $\frac{1}{4} \left\| \frac{dH}{dz} h_1 \right\|^2$, from (41) it turns out that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{h}\|^2 = & - \left[\left\| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 + R \left\| H \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} h_1 \right\|^2 \right] + \\ & + \frac{R}{4} \left[\left\| \frac{dH}{dz} h_1 \right\|^2 + \int_{-1}^1 \frac{d^2 H^2}{dz^2} h^2 dz \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

On removing the primes, the dimensionless form of the equation (14)₃ can be written

$$RH^3 + 3H + \gamma_1 z + \gamma_2 = 0 \quad (43)$$

where

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{c_1 d}{\eta_e \tilde{H}} = +\frac{1}{2} [R(H_1^3 - H_2^3) + 3(H_1 - H_2)] \\ \gamma_2 = \frac{c_2}{\eta_e \tilde{H}} = -\frac{1}{2} [R(H_1^3 + H_2^3) + 3(H_1 + H_2)]. \end{cases} \quad (44)$$

Since

$$\begin{cases} \frac{dH}{dz} = -\frac{\gamma_1}{3(1 + RH^2)} \\ \frac{d^2 H}{dz^2} = -\frac{2RH}{1 + RH^2} \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 \\ \frac{d^2 H^2}{dz^2} = 2 \left[\left(\frac{dH}{dz} \right)^2 + HH'' \right] = 2 \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 \left(1 - \frac{2RH^2}{1 + RH^2} \right), \end{cases} \quad (45)$$

from (42) it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{h}\|^2 = RI - D = (R\mathcal{F} - 1)D \quad (46)$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \frac{I}{D} \\ I = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 (3h_1^2 + 2h_2^2) dz - \frac{R}{4} \left\| \frac{\frac{dH^2}{dz} \mathbf{h}}{\sqrt{1 + RH^2}} \right\|^2 \\ D = \left\| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right\|^2 + R \left\| H \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} h_1 \right\|^2. \end{cases} \quad (47)$$

Now we define R_E by

$$\frac{1}{R_E} = \max_I \mathcal{F} \quad (48)$$

where

$$I = \{ \mathbf{h} \in C^2(-1, 1) : \mathbf{h} = 0 \text{ when } x = \pm 1 \}. \quad (49)$$

Therefore

$$R < R_E \quad (50)$$

guarantees the nonlinear stability in the L^2 -norm.

Owing to the high nonlinearity of the basic motion M , the Euler - Lagrange equations of the variational problem (48) appear not easy. Nevertheless we determine now some stability conditions which appear large and much less restrictive and involved than the conditions obtained in [5]. Further these conditions, in some cases, guarantee the nonlinear stability $\forall R > 0$.

i) *Nonlinear stability in the case $H_1 = H_2$.* Let be $H_1 = H_2$. Then from (43)₁ - (45)₁ it turns out that $\{ \gamma_1 = 0, \frac{dH}{dz} = 0, \forall z \in [-1, 1] \}$. Therefore (41) guarantees that

$$\|h\|^2 \leq \|h(0)\|^2 e^{-2\pi^2 t}, \quad (51)$$

ii) *Nonlinear stability for big R in the case $H_i \neq 0 (i = 1, 2)$, and stabilizing effect of the imbedding magnetic field.* From (42) and (45) it

follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{h}\|^2 \leq \int_{-1}^1 \left[\frac{R}{4} \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 \left(3 - \frac{4RH^2}{1+RH^2} \right) - \pi^2 \right] h^2 dz + \\ - R \left\| H \frac{\partial h_1}{\partial z} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{dH}{dz} h_1 \right\|^2. \quad (52)$$

Therefore the condition

$$R > \frac{3}{H^2}, \quad \forall z \in [-1, 1] \quad (53)$$

guarantees the stability of M according to the exponential decay (51). We remark that, according to (45)₁, H is a monotone function of z . Therefore on defining

$$H_0 = \text{minimum}(|H_1|, |H_2|), \quad (54)$$

the condition (53) becomes

$$R > \frac{3}{H_0^2} \quad (55)$$

and shows *the stabilizing effect of the imbedding magnetic field.*

iii) *Complementary conditions of nonlinear stability.* From (52) it follows that the stability of M is guaranteed by

$$R \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 \left(3 - \frac{4RH^2}{1+RH^2} \right) \leq 4\pi^2, \quad \forall z \in [-1, 1] \quad (56)$$

and hence by

$$3R \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 \leq 4\pi^2 + R^2 \left(H \frac{dH}{dz} \right)^2 + 4\pi^2 RH^2, \quad \forall z \in [-1, 1]. \quad (57)$$

From (45) it follows that

$$\left(\frac{dH}{dz} \right)^2 = \frac{\gamma_1^2}{9(1+RH^2)^2}. \quad (58)$$

Therefore (56) is satisfied when

$$R(3 - RH_0^2) \leq \frac{36\pi^2}{\gamma_1^2} (1 + RH_0^2), \quad (59)$$

and hence when

$$\gamma_1^2 R < 12\pi^2 (1 + RH_0^2). \quad (60)$$

On choosing suitably e_1 , we can assume $H_1 > H_2$ and hence

$$\begin{cases} a = H_1^3 - H_2^3 > 0 \\ b = H_1 - H_2 > 0 \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(aR + 3b) > 0. \end{cases} \quad (61)$$

Therefore (60) is satisfied when

$$R(aR + 3b)^2 \leq 48\pi^2. \quad (62)$$

Since the left hand side of (62) increases from 0 to ∞ when R runs from 0 to ∞ , the following stability condition follows

$$\begin{cases} R \leq \bar{R} \\ \sqrt{\bar{R}} \cdot (a\bar{R} + 3b) = 4\sqrt{3}\pi \end{cases} \quad (63)$$

where³

$$\bar{R}^{1/2} = 3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\pi}{a} + \sqrt{\frac{12\pi^2}{a^2} + \left(\frac{b}{a}\right)^3}} - 3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\pi}{a} - \sqrt{\frac{12\pi^2}{a^2} + \left(\frac{b}{a}\right)^3}}. \quad (64)$$

Since (60) is also satisfied when

$$\gamma_1^2 \leq 12\pi^2 H_0^2, \quad (65)$$

the stability condition

$$R < \frac{4\sqrt{3}\pi H_0 - 3(H_1 - H_2)}{H_1^3 - H_2^3} \quad (66)$$

³Let us notice that, because of (61)₁ - (62)₂, the discriminant of (63) is positive.

immediately follows.

On passing now to (57), we notice that it is satisfied when

$$R^2 \left(H \frac{dH}{dz} \right)^2 - 3R \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 + 4\pi^2 > 0, \quad \forall R \quad (67)$$

and hence when

$$9 \left(\frac{dH}{dz} \right)^2 - 16\pi^2 H^2 < 0. \quad (68)$$

Therefore the stability condition

$$|H_1| \exp \left[-\frac{4\pi(z+1)}{3} \right] \leq |H| \leq |H_1| \exp \left[\frac{4\pi(z+1)}{3} \right], \quad z \in [-1, 1] \quad (69)$$

easily follows.

iv) *A condition ensuring the nonlinear stability* $\forall R > 0$. On coupling (55) to (66) [or to (63)], it is not hard to obtain conditions ensuring the nonlinear stability of M , $\forall R > 0$. For instance, let be $H_1 > H_2 > 0$. On choosing suitably \tilde{H} , we may assume $H_0 = H_2 = 1$. Hence it follows that

$$\frac{4\sqrt{3}\pi H_0 - 3(H_1 - H_2)}{H_1^3 - H_2^3} = \frac{4\sqrt{3}\pi H_0}{H_1^3 - H_2^3} - \frac{3}{H_1^2 + H_1 H_2 + H_2^2} \geq \frac{4\sqrt{3}\pi}{H_1^3 - 1} - 1.$$

Therefore

$$\frac{4\sqrt{3}\pi}{H_1^3 - 1} - 1 \geq 3$$

and hence

$$1 \leq H_1^3 < 1 + \sqrt{3}\pi$$

ensures the nonlinear stability of M , $\forall R > 0$.

8. Concluding remarks

Let us conclude remarking that the results obtained show that in the case at hand

i) does not exist an instabilizing focusing effect of the laminar perturbations;

ii) the imbedding magnetic field has a strong stabilizing effect.

Of course one cannot expect the nonlinear stability, $\forall R > 0$, in general (i.e. with respect to the non laminar perturbations). Further, as concerns the relevant result ii), which is generated by the ion-slip effect, it arises the question of showing if it holds in general and hence also with respect to the perturbations non-coplanar to the imbedding magnetic field.

Acknowledgements.

This research has been partially supported by the Italian Ministry for University and Scientific Research (M.U.R.S.T.) under 40 % and 60 % contracts, and by G.N.F.M. of the Italian C.N.R..

REFERENCES

- [1] S.I. Pai, "Modern Fluidmechanics," Van Nostrand (1981).
- [2] G. Sutton - Shermann A., "Engineering Magnetohydrodynamics," McGraw-Hill (1965).
- [3] S. Rionero, *Sulla stabilità magnetofluidodinamica non lineare asintotica in media in presenza di effetto di Hall*, Ricerche di Mat. **20** (1971), 285-296.
- [4] M. De Mitri - M. Maiellaro, *Couette-Poiseuille flows and their stability in anisotropic M.H.D.*, Meccanica **19** (1984), 269-274.
- [5] M. De Mitri - M. Maiellaro, *A note on nonlinear stability of the Poiseuille flows in anisotropic M.H.D.*, Meccanica **22** (1987), 35-37.
- [6] G. Mulone - V.A. Solonnikov, *On an initial boundary-value problem for equations of magnetohydrodynamics with Hall and ion-slip effect*, Zapiski. Nauchn. Semin. Pomi **221** (1995), 167-184.
- [7] G. Mulone - V.A. Solonnikov, *On the solvability of some initial boundary value problems of magnetofluidmechanics with Hall and ion-slip effects*, Rend. Mat. Acc. Lincei Atti Acc. Lincei **6** (1995), 117-132.
- [8] J.N. Flavin - S. Rionero, "Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction," CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida (1995).

* Università degli Studi di Napoli "Federico II". Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli", Complesso "Monte S. Angelo". Edificio "T". Via Cintia - 80126 Napoli.

** Università degli Studi di Bari. Dipartimento di Matematica. Via E. Orabona - 70125 Bari.

AN HEWITT-YOSIDA THEOREM FOR FUNCTIONS DEFINED ON MINIMAL CLANS

Nota by EMMA D'ANIELLO *and* MARIA GABRIELLA GRAZIANO
Presentata dal Socio PAOLO DE LUCIA

Adunanza del 2 dicembre 1995

Abstract

We introduce a definition of countable additivity in a positive minimal clan \mathcal{E} for real valued functions and then we prove, according to this definition, that each finitely additive order bounded function admits an Hewitt-Yosida decomposition when \mathcal{E} is commutative as well.

Riassunto

Dopo aver dato una definizione di numerabile additività in un clan minimale \mathcal{E} positivo per funzioni a valori reali, dimostriamo che ogni funzione finitamente additiva limitata rispetto all'ordine ammette una decomposizione del tipo Hewitt-Yosida nel caso in cui \mathcal{E} sia anche commutativo.

Key words: Minimal clans, Hewitt-Yosida Theorem, Fuzzy sets.

1. Introduction

The Hewitt-Yosida decomposition theorem ensures that each real valued finitely additive order bounded function defined on a Boolean ring can be decomposed into the sum of a countable additive function and a purely finitely additive function, both order bounded, in a unique way [9], [12], [1].

Recently, some authors, trying to unify similar results for operators on Riesz spaces and for functions defined on Boolean algebras, have introduced the notion

of minimal clan (Vitali spaces, according to Constantinescu), [6,7,8,9], [5], [10], [11].

In this note we give a definition of countable additivity for real valued functions on positive minimal clans, which are a generalization of Boolean rings and we obtain, in the further hypothesis of commutativity, a decomposition into a countably additive part and a purely finitely additive part for each finitely additive order bounded function [theorem 4.6]. Since in the particular case that \mathbb{E} is a Boolean ring the introduced definition of countable additivity coincides with the classical one, we find again the Hewitt-Yosida theorem, recalled above.

Then we note that the additive classes of fuzzy sets introduced by Butnariu [2,3] are commutative and positive minimal clans, but not necessarily Boolean rings and that the definitions of finite additivity and countable additivity introduced by Butnariu for real valued functions on an additive class of fuzzy sets coincide with the ones we use, for this reason this result can be used in "fuzzy measure theory".

2. Preliminaries

A minimal clan is a set \mathbb{E} with a relation $S \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, a map $+$: $S \rightarrow \mathbb{E}$ and an order relation \leq such that

- (MC - 1) there exists an element $0 \in \mathbb{E}$ satisfying $(0, x) \in S$, $(x, 0) \in S$ and $0 + x = x = x + 0$ for all $x \in \mathbb{E}$;
- (MC - 2) for all $x, y, z \in \mathbb{E}$, $(x, y) \in S$ and $(x + y, z) \in S$ if and only if $(y, z) \in S$ and $(x, y + z) \in S$, and in this case $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (MC - 3) $x = y$ holds for all $x, y \in \mathbb{E}$ satisfying $u + x + v = u + y + v$ for some $u, v \in \mathbb{E}$ satisfying $(u, x) \in S$, $(u + x, v) \in S$, $(u, y) \in S$ and $(u + y, v) \in S$;
- (MC - 4) $u + x + v \leq u + y + v$ holds for all $x, y \in \mathbb{E}$ satisfying $x \leq y$ and for all $u, v \in \mathbb{E}$ satisfying $(u, x) \in S$, $(u + x, v) \in S$, $(u, y) \in S$ and $(u + y, v) \in S$;
- (MC - 5) $x \vee y := \sup\{x, y\}$ and $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ exist for all $x, y \in \mathbb{E}$; and
- (MC - 6) for all $x, y \in \mathbb{E}$, there exist $u, v \in \mathbb{E}$ satisfying $0 \leq u$, $0 \leq v$, $(u, x) \in S$, $(x, v) \in S$, $(u, x \wedge y) \in S$, $(x \wedge y, v) \in S$, $u + x = x \vee y = x + v$ and $u + x \wedge y = y = x \wedge y + v$

Axiom (MC-3) is the cancellation property and axiom (MC-6) will be referred to as the difference property. Throughout this section, let $(\mathbb{E}, S, +, \leq)$ be a minimal clan. Two elements $x, y \in \mathbb{E}$ are summable if $(x, y) \in S$. If $u \leq x$, $v \leq y$ and $(x, y) \in S$, then $(u, v) \in S$ [9]. An element $x \in \mathbb{E}$ is positive if $x \geq 0$. The set of all positive elements of \mathbb{E} will be denoted by \mathbb{E}_+ .

A minimal clan is positive if $\mathbb{E} = \mathbb{E}_+$.

Two elements $x, y \in \mathbb{E}$ are disjoint if $x \wedge y = 0$.

A minimal clan is commutative if for all $x, y \in \mathbb{E}$, $(x, y) \in S$ if and only if $(y, x) \in S$, and in this case $x + y = y + x$.

Every minimal clan is a distributive lattice, [9], and if $u + x + v \leq u + y + v$; then $x \leq y$ (order cancellation property) [9].

If $x, y, z \in \mathbb{E}_+$ and $(y, z) \in S$, then $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$, [9]. Boolean rings are precisely the minimal clans having a minimal domain of addition $S = \{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}; x \wedge y = 0\}$.

A function $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is additive if $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ holds for all $x, y \in \mathbb{E}$ satisfying $(x, y) \in S$. Under the point-wise defined linear operations and the order relation \leq , given by $\varphi \leq \psi$ if and only if $\varphi(z) \leq \psi(z)$ holds for all $\forall z \in \mathbb{E}_+$, the collection of all additive functions $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is an ordered vector space which will be denoted by $a(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

If \mathbb{E} is a Boolean ring it is obvious that $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is additive if and only if it is a vector measure.

An additive function $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is order bounded if, for each $z \in \mathbb{E}_+$, the set $\{\varphi(u) | u \in [0, z]\}$ is an order bounded subset of \mathbb{R} ($[0, z] = \{x \in \mathbb{E} : 0 \leq x \leq z\}$).

The ordered vector space of all order bounded additive functions $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ will be denoted by $oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

Since \mathbb{R} is a complete Riesz space, $oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ is a complete Riesz space as well [9].

A sequence $\{z_n \in \mathbb{E}_+, n \in \mathbb{N}\}$ order converges to 0 if there exists a sequence $\{z'_n \in \mathbb{E}_+ | n \in \mathbb{N}\}$ which decreases to 0 and satisfies $z_n \leq z'_n, \forall n \in \mathbb{N}$. More generally $\{z_n \in \mathbb{E}_+, n \in \mathbb{N}\}$, converges to z if $\exists \{z'_n \in \mathbb{E}_+, n \in \mathbb{N}\}$ and $\{z''_n \in \mathbb{E}_+, n \in \mathbb{N}\}$ such that $z'_n \downarrow z, z''_n \uparrow z$ and $z''_n \leq z_n \leq z'_n, \forall n \in \mathbb{N}$. In this case, we shall write $0 - \lim_n z_n = z$.

A collection \mathcal{N} of order bounded sequences in \mathbb{E}_+ is solid if it contains every

sequence $\{z_n \in \mathbb{E}_+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ for which there exists a sequence $\{z'_n \in \mathbb{E}_+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{N} satisfying $z_n \leq z'_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

An additive function $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is \mathcal{N} -continuous if $\lim \varphi(z_n) = 0$ holds for every sequence $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{N} . φ is order \mathcal{N} -singular if $|\varphi|$ exists in $a(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ and if $\psi = 0$ holds for each ψ \mathcal{N} -continuous satisfying $0 \leq \psi \leq |\varphi|$.

Each $\varphi \in oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ can be decomposed in a unique way into the sum of a \mathcal{N} -continuous function and a \mathcal{N} -singular function (Abstract order Lebesgue decomposition theorem, [9]).

3. Countable additivity

Let \mathbb{E} be a positive minimal clan. A function $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be countably additive if for any sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} such that:

(i) $\left(\sum_{i=1}^n x_i, x_{n+1}\right) \in S$, for any $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $0 - \lim_n \sum_{i=1}^n x_i$ exists in \mathbb{E} ,

$$\varphi\left(0 - \lim_n \sum_{i=1}^n x_i\right) = \varphi\left(0 - \sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \text{ holds.}$$

3.1 Lemma

Let \mathbb{E} be a minimal clan. Let $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in \mathbb{E} and x be an element of E such that $(x_n, x) \in S$ for any n in \mathbb{N} and $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n$ exists in \mathbb{E} . Then

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (x_n + x) \text{ exists in } \mathbb{E} \text{ and } \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (x_n + x) = \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x.$$

Proof

For any natural number i in \mathbb{N} , $\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x \leq x_i + x$, therefore $\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x$ is a lower bound of this sequence. Let b be another lower bound of $(x_i + x)_{i \in \mathbb{N}}$; without loss of generality, we can suppose $\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x \leq b$. By the difference property, there exists $u \geq 0$ such that $u + \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x = b$.

This yields $u + \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x \leq x_i + x, \forall i \in \mathbb{N}$, and hence $u + \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) \leq x_i$,

$\forall i \in \mathbb{N}$. From this follows $u + \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n$, thus $u \leq 0$, but $0 \geq u \geq 0$ and $b = u + \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x$ imply $b = \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) + x = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (x_n + x)$. \square

3.2 Lemma

Let \mathbb{E} be a commutative and positive minimal clan. Let $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} be an increasing sequence such that $x = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Then there exists an order decreasing to 0 sequence $(u_n \downarrow 0)$ such that $x_n + u_n = x$ for all n in \mathbb{N} .

Proof

Since $x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$, there exists a sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $x_n + u_n = x$ (by MC - 6), $\forall n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is increasing, thus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is decreasing. $(x = x_n + u_n = x_{n+1} + u_{n+1} \geq x_n + u_{n+1} \Rightarrow u_n \geq u_{n+1})$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreases to zero, indeed let u be a lower bound such that $0 \leq u \leq u_n \leq x$, there exist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and v in \mathbb{E} satisfying $u + y_n = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ and $u + v = x$.

The three relations $u + y_n = u_n$, $u + v = x$, $x_n + u_n = x$ imply $x_n + u + y_n = x = u + v$, from these equalities we obtain $x_n + y_n = v$ (by the commutative and associative properties and by the cancellation law).

Hence follows $x_n \leq v \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Therefore $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n = x \leq v$. It follows then that $x \leq v$, $v \leq x$ and $u + v = x$ and these yield $u = 0$. \square

4. Theorem

Let \mathbb{E} be a positive and commutative minimal clan and $\varphi \in a(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Then the following are equivalent

(a) φ is countably additive;

(b) $\lim_n \varphi(x_n) = \varphi(x)$, for any increasing sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} such that $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$;

(c) $\lim_n \varphi(x_n) = 0$, for any decreasing sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} such that $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$.

Proof

(a) \Leftrightarrow (b)

(a) \Rightarrow (b). Let $x_n \uparrow x$. Define $x_1 := a_1$. By the difference property it follows that

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow \exists a_2 \text{ s.t. } x_1 + a_2 = a_1 + a_2 = x_2 \\ x_2 \leq x_3 &\Rightarrow \exists a_3 \text{ s.t. } x_2 + a_3 = x_3 = (a_1 + a_2) + a_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} \leq x_n &\Rightarrow \exists a_n \text{ s.t. } x_{n-1} + a_n = x_n = (a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

In this way, by induction, we find a sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} satisfying 3(i) and such that $\forall n \in \mathbb{N}, a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_n$.

From $0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 - \lim_n \sum_{i=1}^n a_i = 0 - \lim_n x_n = x$ and from the countable additivity of φ follows $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(a_n) = \lim_n \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) = \lim_n \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \lim_n \varphi(x_n)$.

(b) \Rightarrow (a). For any sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} satisfying 3(i) and (ii), $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$

is increasing and $0 - \lim_n \sum_{i=1}^n x_i = \sup_n \sum_{i=1}^n x_i$, hence

$$\varphi\left(0 - \lim_n \sum_{i=1}^n x_i\right) = \varphi\left(0 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \varphi\left(\sup_n \sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i).$$

(b) \Leftrightarrow (c)

(b) \Rightarrow (c). Let $x_n \downarrow 0$.

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow \exists a_2 \text{ s.t. } x_1 = x_2 + a_2$$

$$x_2 \geq x_3 \Rightarrow \exists a_3 \text{ s.t. } x_2 = x_3 + a_3.$$

From $x_2 = x_3 + a_3$ and $x_1 = x_2 + a_2$ follows $x_1 = (x_3 + a_3) + a_2 = x_3 + (a_3 + a_2)$.

Let $a_2 := y_2$ and $a_3 + a_2 := y_3$.

Proceeding by induction in this way we find an increasing sequence $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{E} satisfying $x_n + y_n = x_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

We shall prove that $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} y_n = x_1$, in such a way will be $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) = \varphi(x_1)$ and $\lim_n \varphi(x_n) + \lim_n \varphi(y_n) = \lim_n \varphi(x_n) + \varphi(x_1) = \varphi(x_1)$, from which follows $\lim_n \varphi(x_n) = 0$.

$y_n \leq x_1$ holds for any n in \mathbb{N} . Let b be another upper bound of $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfying $b \leq x_1$. Then there exist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and c such that $y_n + u_n = b, \forall n \in \mathbb{N}$, and $b + c = x_1$.

Therefore we obtain $(y_n + u_n) + c = x_1 = y_n + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, thus $u_n + c = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. In particular $0 \leq u_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, implies $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_n$ exists and

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_n = 0.$$

By Lemma 3.1, $0 = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (u_n + c) = \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_n \right) + c$ and therefore $c = 0$ and $b = x_1$.

(c) \Rightarrow (b). Let $x_n \uparrow x$, by Lemma 3.2 there exists $u_n \downarrow 0$ satisfying $x_n + u_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\lim_n \varphi(x_n) + \lim_n \varphi(u_n) = \varphi(x)$ and $\lim_n \varphi(u_n) = 0$ imply $\lim_n \varphi(x_n) = \varphi(x)$. \square

4.1 Notation

Let \mathbb{E} be a positive and commutative minimal clan, we shall denote by $oba_\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ the ordered vector space of all the countably additive functions in $oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.

4.2 Definition

A function $\varphi \in oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ is purely finitely additive if $\psi = 0$ holds for any $\psi \in oba_\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ satisfying $0 \leq \psi \leq |\varphi|$. We shall denote by $oba_p(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ the set of these functions.

4.3 Theorem

Let \mathbb{E} a positive and commutative minimal clan and $\varphi \in oba(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. The following are equivalent:

- (a) φ is countably additive;
- (b) $|\varphi|$ is countably additive.

Proof

(a) \Rightarrow (b). Let $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence such that $u_n \downarrow 0$. Since $u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}$, there exists $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfying $u_n + w_n = u_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Furthermore, for any $u \in [0, u_1]$ and for any $n \in \mathbb{N}$ let $v_n \in \mathbb{E}$ be such that $v_n + u \wedge u_n = u$.

Therefore we obtain

$$v_n + u \wedge u_n = u = u \wedge u_1 = u \wedge (u_n + w_n) \leq u \wedge u_n + u \wedge w_n \leq u \wedge u_n + w_n$$

and, by the cancellation property,

$$v_n \leq w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Now $\varphi^+(u_n) = \varphi^+(u_1) - \varphi^+(w_n) \leq \varphi^+(u_1) - \varphi^+(v_n) \leq \varphi^+(u_1) - \varphi(v_n) = \varphi^+(u_1) + \varphi(u) - \varphi(u \wedge u_n)$ for any $u \in [0, u_1]$ and for any $n \in \mathbb{N}$.

Hence $\lim_n \varphi^+(u_n) \leq \varphi^+(u_1) - \varphi(u) + \lim_n \varphi(u \wedge u_n)$, where $\lim_n \varphi(u \wedge u_n) = 0$, because φ is countably additive and $(u \wedge u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreases ($u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow u_n \wedge u \geq u_{n+1} \wedge u$) and its highest lower bound exists and it is equal to nought (if $w \leq u \wedge u_n \forall n \in \mathbb{N}$, then $w \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, and this implies $w = 0$).

Consequently, $\varphi(u) \leq \varphi^+(u_1) - \lim_n \varphi^+(u_n)$, for any $u \in [0, u_1]$ and this yields

$$\sup_{[0, u_1]} \varphi(u) = \varphi^+(u_1) \leq \varphi^+(u_1) - \lim_n \varphi^+(u_n)$$

and from this we obtain $\lim_n \varphi^+(u_n) = 0$ and, by the previous theorem, φ^+ is countably additive.

Then φ^- is countably additive as well, because $\varphi^- = (-\varphi)^+$ and so $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^- \in \text{oba}_\sigma(\mathcal{E}, \mathbb{R})$.

(b) \Rightarrow (a). Let $|\varphi|$ be countably additive and $u_n \downarrow 0$.

From $0 \leq \varphi^+(u_n) \leq |\varphi|(u_n)$ and $0 \leq \varphi^-(u_n) \leq |\varphi|(u_n)$ it follows that $\lim_n \varphi^+(u_n) = \lim_n \varphi^-(u_n) = 0$ and, thus, $\lim_n \varphi(u_n) = \lim_n \varphi^+(u_n) - \lim_n \varphi^-(u_n) = 0$ and φ is countably additive by Theorem 4 (c). \square

In the next theorem, we prove the equivalence of the definitions of countable additivity and $N(0)$ -continuity in $\text{oba}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$, where $N(0)$ is the solid collection of all the sequences $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E}_+ satisfying $0 - \lim_n z_n = 0$.

4.4 Theorem

Let \mathcal{E} be a positive and commutative minimal clan and $\varphi \in \text{oba}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$. Then φ is countably additive if and only if φ is $N(0)$ -continuous.

Proof

\Rightarrow) Let $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N(0)$ and let $u_n \downarrow 0$ such that $z_n \leq u_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Since φ is countably additive $\lim_n \varphi^+(u_n) = \lim_n \varphi^-(u_n) = 0$. The inequalities $0 \leq \varphi^+(z_n) \leq \varphi^+(u_n)$ and $0 \leq \varphi^-(z_n) \leq \varphi^-(u_n)$ imply $\lim_n \varphi^+(z_n) = \lim_n \varphi^-(z_n) = 0$, and this yields $\lim_n \varphi(z_n) = 0$.

\Leftrightarrow Let $u_n \downarrow 0$, then $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N(0)$ and, therefore, $\lim_n \varphi(u_n) = 0$. \square

4.5 Corollary

Let $\varphi \in \text{oba}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Then φ is purely finitely additive if and only if φ is $N(0)$ -singular.

4.6 Decomposition Theorem

$\text{oba}_\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ and $\text{oba}_p(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ are order complete Riesz spaces and projection bands of $\text{oba}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ and $\text{oba}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ is the order direct sum of these projection bands.

Proof

The proof follows from Theorem 4.4 and from "the abstract order Lebesgue decomposition theorem" [9].

5. Additive and σ -additive functions on additive classes of fuzzy sets

Let X be a non empty set. By a fuzzy subset A of X or, simply, a fuzzy set, we mean a function $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, where $\mu_A(x)$ is interpreted as the degree of membership of x to A [13]. We identify each fuzzy set A with its membership function $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$.

Let $\mathcal{L}(X)$ be the class of all fuzzy subsets of X .

Since any ordinary subset $A \subseteq X$ is completely characterized by its indicator function $\chi_A : X \rightarrow [0, 1]$, it follows that $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$.

We remind that the sum (\oplus) and the difference (\ominus) of two fuzzy sets A and B are defined in the following way:

$$\begin{aligned} (A \oplus B)(x) &= \min(1, A(x) + B(x)) , \quad \forall x \in X , \\ (A \ominus B)(x) &= \max(0, A(x) - B(x)) , \quad \forall x \in X . \end{aligned}$$

5.1 Proposition

For any point x it is true that $\left(\bigoplus_{i=1}^n A_i\right)(x) = \min\left(1, \sum_{i=1}^n A_i(x)\right)$ [2].

5.2 Definition

The sum of the sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is the fuzzy set $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, whose membership function is defined by $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{i=1}^n A_i\right)(x)$, $\forall x \in X$.

5.3 Proposition

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)(x) = \min\left\{1, \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\right\}, \quad \forall x \in X. \quad [2].$$

5.4 Definition

The fuzzy sets A_1, \dots, A_n are said to be disjoint if and only if $\sum_{i=1}^n A_i(x) \leq 1$, $\forall x \in X$. A sequence $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is said to be disjoint if and only if A_1, \dots, A_n are disjoint $\forall n \in \mathbb{N}$.

5.5 Proposition

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a disjoint sequence if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \leq 1$, $\forall x \in X$ [2].

Remark

From Propositions (5.3) and (5.5) it follows that if $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is disjoint, then

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x), \quad \forall x \in X.$$

5.6 Definition

\mathcal{C} is an additive class of fuzzy sets if:

- (i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(X)$
- (ii) $X \in \mathcal{C}$
- (iii) $A \oplus B \in \mathcal{C}$ and $A \ominus B \in \mathcal{C}$, for any pair of fuzzy sets A and B in \mathcal{C} .

\mathcal{C} is σ -additive if it is additive and closed under countable sums.

Let \mathcal{C} be an additive class of fuzzy sets. A function $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be additive if:

- 1) $m(\phi) = 0$.
- 2) $m(A \oplus B) = m(A) + m(B)$, for any pair (A, B) of disjoint fuzzy sets in \mathcal{C} .

Let \mathcal{C} be a σ -additive class of fuzzy sets, $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is σ -additive if

- 1) $m(\phi) = 0$.
- 2) $m\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$, for any sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjoint in \mathcal{C} .

Let \mathcal{C} be an additive class of fuzzy sets. Define a relation $S = \{(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid A(x) + B(x) \leq 1, \forall x \in X\}$, a map $+$: $S \rightarrow \mathbb{E}$ by letting $(A + B)(x) = A(x) + B(x) = (A \oplus B)(x)$, and an order relation \leq by letting $A \leq B$ if and only if $A(x) \leq B(x), \forall x \in X$. Then $(\mathcal{C}, S, +, \leq)$ is a positive and commutative minimal clan which need not to be a Boolean ring, for example, if $\mathcal{C} = \mathcal{L}(x)$ and $A(x) = \frac{1}{2} \forall x \in X$ and $B(x) = \frac{1}{3} \forall x \in X, (A, B) \in S$, but $A \wedge B = B \neq 0$.

5.7 Proposition

σ -additive functions on a σ -additive class of fuzzy sets are precisely those functions on the minimal clan \mathcal{C} having the countable additivity property.

Proof

\Rightarrow) Let m be σ -additive and $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in \mathcal{C} satisfying 3(i) and (ii). By 3(i) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is disjoint and by 3(ii) $0 - \lim_n \sum_{i=1}^n A_i$ exists and $\sup_n \sum_{i=1}^n A_i = 0 - \lim_n \sum_{i=1}^n A_i$.

It is easy to prove that $\left(\sup_n \sum_{i=1}^n A_i\right)(x) = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)(x)$, for any disjoint sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{C} and for any x in X .

$$\text{Thus } 0 - \lim_n \sum_{i=1}^n A_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) = m\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = m\left(0 - \lim_n \sum_{i=1}^n A_i\right)$ implies that m is countably additive.

\Leftarrow) The converse can be proved in a similar way.

5.8 Definition

An additive function $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be bounded if

$$\sup\{|m(A)| : A \in \mathcal{C}\} < \infty .$$

5.9 Remark

An additive function $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is order bounded if and only if it is bounded.

By what we have previously observed and by theorem 4.6, the following theorem holds.

5.10 Theorem

Let \mathcal{C} be a σ -additive class of fuzzy sets. Every additive and bounded function $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ can be decomposed into the sum of a countably additive function and a purely finitely additive function, both bounded. Moreover, this decomposition is unique. \square

References

1. K.P.S. BHASKARA RAO and M. BHASKARA RAO, "Theory of charges". New York - London, Academic Press, 1983.
2. D. BUTNARIU, "Fuzzy measurability and integrability", *J. Math. Anal. Appl.*, **117**, p.385-410 (1986).
3. D. BUTNARIU, "Additive fuzzy measures and integrals. III", *J. Math. Anal. Appl.*, **125**, p.288-303 (1987).
4. D. BUTNARIU and E.P. KLEMENT, "Triangular norm-based measures and games with fuzzy coalitions". Kluwer, 1993.
5. C. CONSTANTINESCU, "Some properties of spaces of measures", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **35** Suppl., p.1-286 (1989).
6. K.D. SCHMIDT, "A common abstraction of Boolean rings and lattice ordered groups", *Comp. Math.*, **54**, p.51-62 (1985).

7. K.D. SCHMIDT, "Decompositions of vector measures in Riesz spaces and Banach lattices", *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **29**, p.23-39 (1986).
8. K.D. SCHMIDT, "Minimal clans: A class of ordered partial semigroups including Boolean rings and lattice ordered groups". *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.1320, p.300-341. Berlin - Heidelberg - New York, Springer, 1988.
9. K.D. SCHMIDT, "Jordan decompositions of generalized vector measures", *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, vol.214. Essex, Longman, 1989.
10. G. WALDSCHACKS, "Fortsetzungen modularer Abbildungen mit Werten in einer verbandsgeordneten Halbgruppe". *Dissertation Universität Mannheim*, 1995.
11. O. WYLER, "Clans", *Comp. Math.*, **17**, p.172-189 (1966).
12. K. YOSIDA and E. HEWITT, "Finitely additive measures", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, p.46-66 (1952).
13. L.A. ZADEH, "Fuzzy sets", *Inform. Control*, **8**, p.338-353 (1965).

EMMA D'ANIELLO and MARIA GABRIELLA GRAZIANO
Dipartimento di Matematica and Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
Compl. universitario Monte S. Angelo
Via Cintia - 80126 Napoli

NOTE PER GLI AUTORI

Il Rendiconto pubblica, di norma in italiano, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della nota per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

La nota dovrà essere presentata in triplice copia, pronta per la riproduzione fotografica alla stessa grandezza. Ciò richiede che la sua stesura sia conforme al modello che è riportato in Appendice al volume annuale ed esclude che si possano apportare modifiche.

I dattiloscritti devono essere su carta bianca in buona qualità e la parte scritta deve essere contenuta in un rettangolo di 12.5 x 19 cm.. Si suggerisce l'uso di una stampante laser. I disegni di formule e grafici non possono essere accettati se prodotti a mano libera; devono essere ad alto contrasto e non superare, insieme alle intestazioni e alle didascalie, il rettangolo di scrittura della pagina. Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere in carta lucida ad alto contrasto e già inserite nel manoscritto. In alternativa può essere lasciato libero lo spazio occorrente per l'effettivo inserimento della figura all'atto della riproduzione e le figure presentate in allegato. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le eventuali didascalie non devono confondersi con il testo. Ogni pagina, inclusa la prima, deve essere numerata progressivamente con il numero in matita blu inserito in basso a destra, oltre il riquadro dello scritto. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo la stessa presentazione nella Sezione Riferimenti bibliografici (References). In ogni caso dovranno riportare nell'ordine necessariamente: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine del lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri grafici da utilizzare, le loro grandezze e le spaziature sono indicate nell'esempio in Appendice.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuiti 25 estratti senza copertina, se vi è un solo autore, 50 estratti in caso di più autori. Ulteriori estratti e/o l'aggiunta della copertina sono a carico degli autori che ne dovranno fare richiesta esplicita all'atto della presentazione del dattiloscritto per la opportuna comunicazione preventiva all'editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

APPENDICE

NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

Prima pagina.

Si lasciano vuoti quattro rigi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara
(canale d'Ischia, Campania)
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1,*}

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

Key words: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, **230**, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:

Acknowledgements: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

¹ Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**
Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1*}

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

^{1,2..} Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

